

Matematika A4

II. gyakorlat megoldás

1. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy A esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, hogy tudjuk, hogy egy másik B esemény már bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A feltételes valószínűség jelölése: $P(A|B)$. Olvasva: A valószínűsége feltéve B -t. Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

1. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok 5 – 5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

Megoldás: A komplementer módszer segítségével $\mathbb{P}(\text{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \mathbb{P}(\text{az ellenfélnek nincs zöldje})$. A feladat hipergeometrikus eloszlással oldható meg (lásd lottós feladat). Így a feltételes esetben a következőt kapjuk

$$\mathbb{P}(\text{az ellenfélnek van zöldje} | \text{nekem 3 zöld és két piros}) = 1 - \frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{15}{5}}.$$

Abban az esetben, ha az én lapjaimról nem tudunk semmit, akkor nincs annak jelentősége, hogy én is kaptam 5 lapot. Így ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{20}{5}}.$$

2. Egy szabályos kockával dobtam. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy párosat dobtam, ha barátomtól tudom, hogy legalább 4-est dobtam?

Megoldás: A feltételes valószínűség definícióját használva:

$$\mathbb{P}(\text{páros a dobás} | \text{legalább 4-es dobás}) = \frac{\mathbb{P}(\text{páros a dobás és legalább 4-es dobás})}{\mathbb{P}(\text{legalább 4-es dobás})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

3. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

Megoldás: A feltételes valószínűség definícióját használva:

$$\mathbb{P}(\text{legalább egy db 2-es dobás} | \text{dobott összeg 6}) = \frac{\mathbb{P}(\text{legalább egy db 2-es dobás és a dobott összeg 6})}{\mathbb{P}(\text{dobott összeg 6})} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

Ha nem tudunk semmit akkor a következő kapjuk:

$$\mathbb{P}(\text{legalább egy db 2-es dobás}) = 1 - \mathbb{P}(\text{egyik dobás sem 2-es}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

(A feladat az eseménytér felírásával is megoldható.)

4. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

- a) Véletlenszerűen kihúzzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé?

Megoldás: $\mathbb{P}(B1) = \frac{110}{260}$

- ii) betegé?

Megoldás: $\mathbb{P}(A1) = \frac{100}{260}$

- iii) beteg fiúé?

Megoldás: $\mathbb{P}(A1 \cap B1) = \frac{50}{260}$

- b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A1|B2) = \frac{\mathbb{P}(A1 \cap B2)}{\mathbb{P}(B2)} = \frac{\frac{40}{260}}{\frac{120}{260}} = \frac{40}{120}.$$

- c) Az orvos szorgos asszisztense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B3|A1) = \frac{\mathbb{P}(B3 \cap A1)}{\mathbb{P}(A1)} = \frac{\frac{10}{260}}{\frac{100}{260}} = \frac{10}{100}.$$

- d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

Megoldás: Itt a megoldásnál a következő részben ismertetett szorzási szabályt használjuk.

$$\mathbb{P}(1 \text{ fiú} - 1 \text{ lány karton} | \text{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{99}.$$

$$\mathbb{P}(2 \text{ fiú karton} | \text{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99}.$$

2. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya (avagy toronyszabály):

$$P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) = P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1) \cdot P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_3 | A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1).$$

5. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehérret, harmadikra zöldet húzzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük

Megoldás: Legyen A_1 az az esemény, hogy az első húzás piros, A_2 az, hogy a második húzás fehér, és A_3 az, hogy a harmadik húzás zöld. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14}.$$

b) nem tesszük vissza?

Megoldás: Ekkor a fenti számok a következőképpen módosulnak:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12}.$$

6. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodsorra már csak a 40%, harmadsorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány a) átvészeli a teljes eljárást?

Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy a csótányok túlélnek az i -dik irtást, $I = 1, 2, 3$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\text{túlél}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,192.$$

b) az utolsó irtáskor pusztul el?

Megoldás: Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(3. \text{ irtásnál hal meg}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_3 | A_2 \cap A_1) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,048.$$

c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

Megoldás: Ekkor használva a feltételes valószínűség definícióját

$$\mathbb{P}(\text{túlél} | 1. \text{ irtást túlélte}) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

7. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?

Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i -dik húzás során kivett alkatrész működőképes, $i = 1, 2, 3$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{13}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}.$$

8. Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt? b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!) c) egyik sem húz ilyen tételt?

Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i -dik hallgató nevezetes eloszlásos tételt húz, $i = 1, 2$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\text{első nevezetes eo, a második nem}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29}$$

$$\mathbb{P}(\text{mindkettő nevezetes eo}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{6}{30}$$

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem nevezetes eo}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29}$$

(Az a) és c) esetben feltettük, hogy nem húzhatják ugyanazt a tételt.)

3. Teljes valószínűség tétele

Ha $H_n, H_{n-1}, H_{n-2}, \dots, H_2, H_1$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_n) \cdot P(H_n) + P(A|H_{n-1}) \cdot P(H_{n-1}) + \dots + P(A|H_1) \cdot P(H_1).$$

9. Egy sulis tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?

Megoldás: Itt az A esemény lesz az, hogy valaki megbukik a vizsgán. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy a hallgató lány, H_2 pedig azt, hogy fiú. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,8$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,2$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,15$ illetve $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,1$. Így a teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,15 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,14.$$

10. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B -nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy a) az első üzletkötés kedvező lesz? b) mindkét üzletkötés javunkra válik? c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?

Megoldás: Itt az A esemény lesz az, hogy kedvező az üzletkötés. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy az A céggel kötünk üzletet, H_2 pedig azt, hogy a B céggel. Ekkor a következő valószínűségek ismertek. $\mathbb{P}(H_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,5$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,6$ illetve $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,7$.

a) rész megoldásava teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,65.$$

b) részben B jelentse azt az eseményt, hogy mindkét üzletkötés kedvező. Ekkor $\mathbb{P}(B|H_1) = 0,6^2$ illetve $\mathbb{P}(B|H_2) = 0,7^2$. Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6^2 \cdot 0,5 + 0,7^2 \cdot 0,5 = 0,65.$$

c) részben C jelenti azt az eseményt, hogy az egyik üzlet sikeres, a másik pedig nem. Ekkor $\mathbb{P}(C|H_1) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4$ illetve $\mathbb{P}(C|H_2) = 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3$ (itt a 2-es szorzóra azért van szükség, mert az első és a második üzlet is lehet a sikeres). Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(C|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,45.$$

11. Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsmában van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy Iván az i -dik kocsmában van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ekkor a H_i -k egymást kizáró események, és uniójuk valószínűsége $2/3$. Iván nem válogatós volta miatt $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Felhasználva, hogy a H_5 esemény része a $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4}$ eseménynek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_5 | \overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4}) &= \frac{\mathbb{P}(H_5)}{\mathbb{P}(\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4})} = \frac{\mathbb{P}(H_5)}{\mathbb{P}(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_5)}{1 - \mathbb{P}(H_1) - \mathbb{P}(H_2) - \mathbb{P}(H_3) - \mathbb{P}(H_4)} = \frac{\frac{2}{15}}{1 - 4 \cdot \frac{2}{15}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

12. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyéréshez (11-10-nél folytatják két pont különbséggig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzdíjazatot: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben 10-9-es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztózkodás a pénzen?

Megoldás:

4. Bayes tétel

Ha tudjuk, hogy A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan H_i eseménnyel valósult meg? (Itt H_1, H_2, \dots, H_n ismételtelen teljes eseményrendszert alkot.) A definíció szerinti képletet felírva a számlálóban a feltételes valószínűségekre, és a nevezőben a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a következő képlet:

$$P(H_i | A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A | H_i) \cdot P(H_i)}{P(A | H_n) \cdot P(H_n) + \dots + P(A | H_1) \cdot P(H_1)}$$

13. A ketyere gyárban az A , B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25%, a B -n 35%, a C -n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C -n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A , B , illetve a C gépsoron gyártották?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a ketyerét az A , B vagy C gépsoron állították elő ($i = 1, 2, 3$). És legyen A az az esemény, hogy a ketyere hibás. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,25$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,35$, $\mathbb{P}(H_3) = 0,4$, $\mathbb{P}(A | H_1) = 0,05$, $\mathbb{P}(A | H_2) = 0,04$, $\mathbb{P}(A | H_3) = 0,02$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűségeket:

$$\mathbb{P}_A(H_1 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A | H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A | H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A | H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,36,$$

$$\mathbb{P}_B(H_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A | H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A | H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A | H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,04 \cdot 0,35}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,41,$$

$$\mathbb{P}_C(H_3 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)}{\mathbb{P}(A | H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A | H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A | H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = 0,23.$$

14. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármás útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniak kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő eséllyel adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2×2 , mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a Odüsszeusz az athéni, spártai vagy mükénéi utat választja ($i = 1, 2, 3$). És legyen A az az esemény, hogy igazat mond a megkérdezett személy. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_3) = 1/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 1$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{11}.$$

15. Az igazak városában az emberek 90%-a igazat mond, a hazugok városában az emberek 85%-a hazudik. Mivel lefüggönyözött busszal hoztak ide minket, nem tudjuk melyikben vagyunk. Megkérdezzük egy embert, aki azt mondja, hogy "Ez a hazugok városa." Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy az igazak vagy a hazugok városába vittek minket ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy igazat mond a megkérdezett személy. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,5$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,9$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,15$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget. (Ha a kiválasztott személy igazat mond, akkor ő lehet a hazugok városában igazmondó, és az igazmondók városában hazug.)

$$\mathbb{P}(\text{igazat mond} | \text{"Ez a hazugok városa"}) = \frac{0,15 \cdot 0,5}{0,15 \cdot 0,5 + 0,9 \cdot 0,5} = \frac{3}{23}.$$

16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

- a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a bináris csatornán 0 vagy 1 jelet adtak le ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy 0-t kaptunk. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 2/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/5$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{15}{23}.$$

- b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

Megoldás: Használva az előző rész jelöléseit, itt a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A}|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(\bar{A}|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0,65.$$

17. Tegyük fel, hogy a lakosság 0.001-ed része szenved egy bizonyos ártalmas betegségben, 0.999-ed része egészséges. A betegség kimutatására szolgáló teszt olyan, hogyha valaki beteg, akkor 0.998 valószínűséggel betegséget

jelez, 0.002 valószínűséggel azt mutatja, hogy az illető egészséges; ha pedig egészséges emberen végzik el a tesztet, akkor 0.995 valószínűséggel egészségesnek diagnosztizálja az illetőt, 0.005 valószínűséggel betegnek. Tegyük fel, hogy Móricka tesztje pozitív, vagyis betegnek mutatja a teszt. Mi a valószínűsége annak, hogy Móricka tényleg beteg?

Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy egy adott ember beteg-e vagy sem ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy a teszt pozitív. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,001$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,999$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/5$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{15}{23}$$

5. Független események

Az A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Több esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n),$$

hanem tetszőleges A_i -k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \dots \cap A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \dots P(A_n).$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van. Fordítva is igaz: ha az összes így származtatott egyenlet fennáll, akkor az A_1, A_2, \dots, A_n eseményekről azt mondjuk, hogy együttesen függetlenek.

18. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikkra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezők. Győződjünk meg róla, hogy A, B, C eseményekből bármely kettő független egymástól, de a 3 esemény együttesen már nem alkot független rendszert!

Megoldás: A szöveg alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$. Ezekből láthatóak, hogy teljesülnek a páronkénti függetlenségek, hisz $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ illetve $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$.

Ugyanakkor $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\text{mindkét dobás fej}) = \frac{1}{4}$, így $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$. (Bármely két esemény már egyértelműen meghatározza a harmadikat.)

19. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: A = a dobott számok összege 7, B = legalább az egyik kockán van hatos, C = mindkét kockával páratlant dobok, D = a két kockával különböző számokat dobok, E = a zöld kockával 4-est dobok.
Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

- a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

Megoldás: A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Ugyanakkor $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$. Így nem teljesül a $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ azonosság, tehát A és C nem lehetnek függetlenek.

b) Kizáróak-e az A és C események?

Megoldás: Igen, hiszen együttes bekövetkezési valószínűségük 0. ($\mathbb{P}(A \cap C) = 0$)

c) Mennyi a B esemény valószínűsége?

Megoldás: $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}$

d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D ? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

Megoldás: Az A esemény része a D eseménynek. Azaz, ha A bekövetkezik, akkor D is. Így A és D nem lehetnek függetlenek, illetve $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(D)$ teljesül.

e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

Megoldás: A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap E) = \frac{1}{36}$. Így teljesül a $\mathbb{P}(A \cap E) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(E)$ azonosság, tehát A és E függetlenek.

f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

i. függetlenek, de nem kizáróak,

Megoldás: A és E események

ii. kizáróak, de nem függetlenek.

Megoldás: A és C események

6. További feladatok

20. Az A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.

Megoldás:

b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?

Megoldás:

c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

Megoldás:

21. (*Felületes utazó*) Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevelet. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt 0, 1 valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?

Megoldás:

b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útleveél nem is volt ezekben?

Megoldás:

22. Az A városból a B városba három diszjunkt út vezet. Egy havas téli éjszakán A -ból B -be kell mennünk, és a rádiót hallgatjuk, hogy hol vannak az utakon hótorlaszok. Korábbi tapasztalatból tudjuk, hogy mind a három úton három kritikus pont van, amelyek mindegyike, egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka el tudunk jutni A -ból B -be?

Megoldás:

23. a) Minden héten egy szelvénnel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?

Megoldás:

b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnel játszunk?

Megoldás:

c) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnel játszunk, amelyeken nincsen egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)

Megoldás:

24. (*Nehéz feladat!*) Szindbád, az Ezeregyéjszaka meséinek híres hőse, N háremhölgy közül szeretné kiválasztani a legszebbet, akik egyesével elsétálnak előtte. Szindbád az ún. K -stratégiával választ közülük: hagyja, hogy K lány elsétáljon előtte (ezek közül semmiképpen nem választ), majd kiválasztja az első olyat, aki minden korábban látottnál szebb. Feltéve, hogy a lányok között szépség szempontjából egyértelmű rendezés van, és egy teljesen véletlen sorrendben jönnek elő, mi a valószínűsége, hogy Szindbád ki tudja választani a legszebbet a K -stratégiával? Kb. mennyi az optimális K érték, ha N nagy? (Segítség: Alkalmazza a teljes valószínűség formuláját azokkal az A_r eseményekkel, hogy a legszebb lány r -edikként jelenik meg, $r = 1, 2, \dots, N$. Határozza meg annak az eseménynek a feltételes valószínűségét, hogy az első $r - 1$ ($r > K + 1$) lányból a legcsinosabb nem esik az első K lány közé! Ugyanis ekkor Szindbád hibázni fog.)

Megoldás: