

Negyedik A4 gyakorlat

rövid megoldási útmutató

2013. október 14.

1. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van. (Számoljuk ki a korábban tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

A 200 véletlenszerűen kiválasztott ember közt a balkezesek száma legyen X . Ekkor ugye X binomiális eloszlású $n = 200$ és $p = 0,01$ paraméterekkel. Ennek megfelelően:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - \left(\sum_{i=0}^3 \binom{200}{i} 0,01^i, 99^{200-i} \right)$$

Mivel $n = 200$ már "nagy"-nak számít, a $p = 0.01$ pedig "kicsi"-nek, ezért a binomiális kifejezések számolása helyett közelíthetünk Poissonnal. Ha n -edrendű p paraméterű binomiális közelítünk Poissonnal, akkor λ -t np -nek kell választani. Esetünkben ez $\lambda = 2$ -t jelent:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} - \frac{2^1}{1!} e^{-2} - \frac{2^2}{2!} e^{-2} - \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.1429$$

2. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tüzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tüzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tüzeset! Egy nap során hány tüzeset a legvalószínűbb?

Legyen X a lakástűzek száma egy adott napon. Sok lakás van, mindegyik nap mindegyik lakásban egy kis valószínűséggel üt ki tűz, így X tekinthető Poisson eloszlásúnak.

$$P(X = 4) = P(X = 5) \Rightarrow \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}$$

Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy $\lambda = 5$. A kérdéses érték:

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{25}{2} e^{-5} \approx 0.08422$$

3. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

Itt is Poisson eloszlást fogunk használni. X legyen egy kiválasztott sütiben lévő mazsolák száma, és tegyük fel, hogy x λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ekkor X várható értéke λ . Ez azt jelenti, hogy ha a paraméter λ , akkor sok kísérlet átlaga λ -hoz fog tartani, vagyis átlagosan λ mazsola lesz egy sütiben. Ennek megfelelően ha kiszámoltuk a megfelelő λ értéket, akkor az lesz a megoldás.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \geq 0.99 \Rightarrow \lambda \geq \log 100 \approx 4,6$$

Összegezve tehát legalább 4,6 db mazsolának kell egy sütire jutnia.

4. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van? Hány sajtóhiba a legvalószínűbb a 13. oldalon? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két sajtóhiba van?

Poissonnal közelítünk. Nincs jelentősége, hogy a 13. oldalról van szó. Átlagosan fél sajtóhiba van egy lapon, vagyis $\lambda = 1/2$.

$$P(13. \text{ oldalon lévő sajtóhibák száma} > 1) =$$

$$1 - P(13. \text{ oldalon lévő sajtóhibák száma} = 0) - P(13. \text{ oldalon lévő sajtóhibák száma} = 1) =$$

$$1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \approx 0,090204$$

6 oldalra átlagosan $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ hibát "várunk", ezért ebben az esetben $\lambda_2 = 3$.

$$\frac{\lambda_2^0}{0!} e^{-\lambda_2} \approx 0,05$$

5. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt.

- Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
- Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
- Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

Jelölje X azon emberek számát, akik egy adott évben a Dunába ölik magukat. Tegyük fel, hogy X Poisson eloszlású valamely λ paraméterrel. A feladat feltétele szerint:

$$P(X = 2) = 3P(X = 5) \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 3 \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,71$$

Tehát átlagosan $\lambda \approx 2,71$ ember öli magát egy évben a Dunába, és

$$P(\text{senki sem lesz így öngyilkos}) = P(X = 0) \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \approx 0,067.$$

6. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz? Mi a valószínűsége, hogy a főnyereményen meg kell osztózni?

Ha X az öttalálatos szelvények száma, akkor X eloszlása nyilván binomiális $n = 4000000$ és $p = P(\text{egy adott szelvény telitalálatos}) = \frac{1}{\binom{90}{5}}$ paraméterekkel. Ennek megfelelően:

$$P(X = k) = \binom{4000000}{k} \left(\frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^{4000000-k},$$

melyet $\lambda = np = \frac{4000000}{\binom{90}{5}} \approx 0,091$ paraméterű Poissonnal közelítve:

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Így:

$$P(\text{főnyereményen meg kell osztotni}) = P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \approx 0,0039$$

7. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

Legyen X a 10:00 és 10:05 között beérkező hívások száma, és tegyük fel, hogy X Poisson eloszlású. Ezen 5 perc alatt átlagosan 10 hívás érkezik, így az eloszlás paramétere $\lambda = 10$. Ennek megfelelően:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} - \frac{10^1}{1!} e^{-10} - \frac{10^2}{2!} e^{-10} - \frac{10^3}{3!} e^{-10} \approx 0,99$$

8. A „Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullancs fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

Legyen X a kullancsok száma egy adott emberben. Ekkor X tekinthető Poisson eloszlásúnak. A feladat szövege alapján:

$$300 : 75 = P(X = 1) : P(X = 2) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} : \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Empirikusan a $P(X = 1)$ valószínűség a $\frac{\text{azon versenyzők száma, akik 1 kullancsot találtak magukban}}{\text{összes induló száma}}$ hányadossal közelíthető, így ha N induló volt összesen, akkor:

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{300}{N} \Rightarrow N \approx 990.$$

9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

Legyen X azon autók száma, akik az 5 perc alatt átlélik a sebességhatárt, és tegyük fel, hogy X eloszlása Poisson. A feladat szövege szerint:

$$P(X = 0) = P(X > 0) = 1 - P(X = 0) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,7$$

Így:

$$P(X = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \approx 0,028.$$

10. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

X legyen a dobott szám. Ekkor X lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5, 6 és mindegyiknek $\frac{1}{6}$ a valószínűsége. Így

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

11. A diszkrét X valószínűségi változó súlyfüggvénye: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x = 1, 2, 3, 4$). Mennyi X várható értéke? És a módusza? Mennyi X^2 várható értéke? $E(\frac{1}{X}) = ?$

X módusza 4 hiszen ennek a kimenetelnek legnagyobb a valószínűsége.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1^2}{30} + 2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3 \cdot \frac{3^2}{30} + 4 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1^2}{30} + 2^2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3^2 \cdot \frac{3^2}{30} + 4^2 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{354}{30}$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1^2}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{1}{3}$$

12. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-ot kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

Egy lehetséges megoldás vázlata:

Két 6×6 -os táblán írjuk fel a kockadobások összes lehetséges kimenetelét. Az első táblán minden lehetséges kimenetelhez írjuk fel, hogy Albert mennyi pénzt ad Bélának, a másik táblán pedig, hogy Béla mennyi pénzt ad Albertnek. A felírt események mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűséggel fordul elő, ezért mindegyik értéket $\frac{1}{36}$ -dal megszorozva és összeadva a két táblán megkapjuk, hogy Béla "átlagosan" (sok játék után a Béla által kifizetett pénz ennyi körül stabilizálódna) $\frac{35}{6}$ Ft-ot ad Aladárnak, míg "átlagosan" 7 Ft-ot kap. Így Béla jár jobban.

13. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?

Tegyük fel, hogy az összes sorsjegyből húznak majd, és legyen X a nyeremény egy adott sorsjegy esetén. Ekkor:

$$E(X) = 1000000 \cdot \frac{1}{40000} + 50000 \cdot \frac{10}{40000} + 5000 \cdot \frac{100}{40000} = 50,$$

így egy sorsjegy ára 100 Ft kell hogy legyen.

14. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, egy szelvényvel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

A találatok száma a lottón hipergeometriai eloszlású $A = 5, B = 85, n = 5$ paraméterekkel, így a k -találatos szelvény valószínűsége: $\frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$. A nyereségünk minden esetben a nyeremény-150 Ft, így ennek várható értéke:

$$\frac{\binom{5}{0} \binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \cdot (-150) + \frac{\binom{5}{1} \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \cdot (-150) + \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot (700 - 150) +$$

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot (10000 - 150) + \frac{\binom{5}{4} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot (789000 - 150) + \frac{\binom{5}{5} \binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \cdot (535000000 - 150) = -106.34 \text{ Ft}$$

15. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

Legyen X Péter "nyereménye" a játékban. Ekkor X lehetséges értékei $-100, -20, 10, 400$. Könnyen számolható, hogy ezek valószínűségei rendre $\frac{3}{6}, \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6}, \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}, \frac{1}{6}$, így

$$E(X) = -100 \cdot \frac{3}{6} + (-20) \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} + 10 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + 400 \cdot \frac{1}{6} = 15.$$

Mivel $E(x) > 0$, a játék előnyös Péter számára.

16. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobunk. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzüsszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

A játék akkor igazságos, ha mindkét fél esetén a "nyeremény" várható értéke 0. Nyilván most elég megkövetelni, hogy Anna nyereményének várható értéke 0 legyen. Anna nyereményét tehát jelölje X , páratlan számok esetén Anna fizessen Bélának y -t és különböző paritású számok esetén Béla fizessen Annának z -t. Az utóbbi 2 esemény valószínűsége könnyen számolható, mégpedig $P(2 \text{ páratlan}) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}$ és $P(\text{különböző paritás}) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$. Így Anna várható nyereménye:

$$E(X) = (-y) \cdot \frac{1}{4} + z \cdot \frac{1}{2}.$$

Igazságos játékhoz $E(X) = 0$ kell, ami $x = 2z$ esetén teljesül, vagyis az kell, hogy az Anna által fizetett összeg kétszerese legyen a Béla által fizetett összegnek.

17. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzásorozatot egy kísérletnek. a) Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását! b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét és móduszát!

X lehetséges értékei 1,2,3,4,5,6.

$$P(X = 1) = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{21}$$

$$P(X = 4) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{7} = \frac{3}{21}$$

$$P(X = 5) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$$

$$P(X = 6) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{21}$$

Ez alapján X módusza 1 és várható értéke:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{6}{21} + 2 \cdot \frac{5}{21} + 3 \cdot \frac{4}{21} + 4 \cdot \frac{3}{21} + 5 \cdot \frac{2}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{8}{3}$$

18. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

Jelölje X a szükséges dobások számát. Ekkor X optimista geometria eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így várható értéke $E(X) = \frac{1}{p} = 6$. Amennyiben 2 kockával dobunk, a paraméter értéke $\tilde{p} = P(\text{valamelyik kockán 6-os van}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ -ra változik, ennek megfelelően pedig a várható érték $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{36}{11}$.

19. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

Jelölje X a dobások számát. Ekkor $X = Y + 1$, ahol Y eloszlása megegyezik egy $p = \frac{1}{6}$ paraméterű optimista geometriai valószínűségi változó eloszlásával (a "siker" eseménye mindig változik az előző dobás értékének megfelelően). Így $E(X) = 1 + E(Y) = 1 + \frac{1}{p} = 7$.

20. Piroska és Zoli kockáznak. Piroska feldob egy piros, Zoli feldob egy zöld kockát. Ha Piroska 1-et vagy 2-t dob, ő nyer, és kap Zolitól 5 Ft-ot; ha Zoli 6-ot dob, ő a nyertes, és 11 Ft-ot kap Piroskától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszerre dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem előlről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Ferit, dobáljon ő egyetlen fehér kockával, de a nyelési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes-e elfogadni Piroskának Zoli ajánlatát?

Vizsgáljuk a játékot Piroska szempontjából, és legyen X Piroska nyereménye a játék során. X lehetséges nem nulla értékei 5 és -11 .

$$P(X = 5) = P(\text{Piroska 1-et vagy 2-t dob és Zoli nem dob 6-ost}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = -11) = P(\text{Piroska legalább 3-at, Zoli pedig 6-ost dob}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

Így Piroska nyereményének várható értéke:

$$E(X) = 5 \cdot \frac{5}{18} + (-11) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{17}{9}$$

A módosított játékszabályák esetén Piroska nyereményét jelölje Y , melynek értékei továbbra is 5 és -11 .

$$P(Y = 5) = P(\text{Feri 1-et vagy 2-t dob}) = \frac{2}{6}$$

$$P(Y = -11) = P(\text{Feri 6-ost dob}) = \frac{1}{6}$$

$$E(Y) = 5 \cdot \frac{2}{6} + (-11) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Mivel $E(Y) > E(X)$, ezért Piroska jól jár, ha elfogadja Zoli ajánlatát.

21. Mennyi az ötös lottón a találatok számának várható értéke?

Ötös lottón a találatok X száma hipergeometriai eloszlású $A = 5, B = 85, n = 5$ paraméterekkel, így várható értéke $E(X) = 5 \cdot \frac{5}{5+85} = \frac{5}{18}$.

22. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmat kell nyernie. Legyen p , illetve $q (= 1 - p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmat az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmatok számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmatok számának várható értéke?

Legyen X a szükséges játszmatok száma. Ekkor X lehetséges értékei 3, 4 és 5. A két játékost jelöljük A -val és B -vel, az egyes kimeneteket pedig ezen betűkből álló szavakkal, amelyekben az i . pozícióban lévő betű az i . játszma győztesét jelöli. Ekkor

$$P(X = 3) = P(AAA, BBB) = \binom{2}{0} p^3 + \binom{2}{0} q^3 = p^3 + q^3,$$

$$P(X = 4) = P(AABA, ABAA, BAAA, BBAB, BABB, AB BBB) = \binom{3}{1} p^3 q + \binom{3}{1} p q^3 = 3p^3 q + 3p q^3,$$

$$P(X = 5) = P(\{3 \text{ db } A \text{ és } 2 \text{ db } B, \text{ és } A \text{ van a végén}\} \text{ vagy } \{3 \text{ db } B \text{ és } 2 \text{ db } A, \text{ és } B \text{ van a végén}\}) = \binom{4}{2} p^3 q^2 + \binom{4}{2} p^2 q^3 = 6p^3 q^2 + 6p^2 q^3,$$

valamint

$$E(X) = 3(p^3 + q^3) + 4(3p^3 q + 3p q^3) + 5(6p^3 q^2 + 6p^2 q^3).$$

A játszmatok számának várható értéke nyilván akkor lesz a legnagyobb, amikor a játék a legkiegyenlítettebb, vagyis amikor $p = q = \frac{1}{2}$.

23. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

Ennél a játéknál minden stratégia úgy néz ki, hogy a játékos rögzít egy k értéket, és addig játszik, amíg feketét nem dob, vagy be nem fejezi a k . kört. Rögzített k mellett:

$$P(\text{a játékos nyer}) = P(\text{első } k \text{ dobás zöld}) = \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Minden más esetben a játékos veszít. Ha X jelöli a nyereseményét, akkor:

$$E(X) = (k \cdot 100 - 250) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k + (-250) \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) = 100k\left(\frac{5}{6}\right)^k - 250.$$

Az optimális stratégiához a fenti kifejezést kell k -ban maximalizálnunk. Ehhez k szerint deriválva, és egyenlővé téve 0-val kapjuk, hogy:

$$100\left(\frac{5}{6}\right)^k + 100k\left(\frac{5}{6}\right)^k \ln\left(\frac{5}{6}\right) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{-100} \ln \frac{5}{6} \approx 5,48$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez valóban maximum, és hogy ha csak egész k -ra nézzük a dolgot, akkor $k = 5$ és $k = 6$ adja a legnagyobb értéket. Vagyis az optimális stratégiánál $k = 5$ vagy $k = 6$, de a várható érték ekkor is csak $E(X) = 500\left(\frac{5}{6}\right)^5 - 250 \approx -49$.

24. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?

b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

Az első játékos páratlan sok kosárra dobás után nyerhet.

$$P(\text{első játékos } 2k + 1 \text{ dobás után nyer}) = (1 - 0,5)^k (1 - 0,6)^{k,5} = 0,5^k \cdot 0,5$$

Ha ezeket a valószínűségeket összeadom $k = 0, 1, 2, \dots$ -ra, akkor megkapom a kívánt valószínűséget:

$$P(\text{első játékos nyer}) = \sum_{k=0}^{\infty} 0,5^k \cdot 0,5 = \frac{0,5}{1 - 0,5} = \frac{1}{2}.$$

A várható értékhez:

$$P(\text{második játékos } 2k + 2 \text{ dobás után nyer}) = (1 - 0,5)^{k+1} (1 - 0,6)^{k,6} = 0,5^{k+1} \cdot 0,3.$$

Tehát:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)0,5^{i+1} \cdot 0,3 + \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2)0,5^{i+1} \cdot 0,3 = \dots = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{8} + (2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3) \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot 0,5^i =$$

$$\frac{11}{8} + 1,6 \cdot \frac{0,2}{1 - 0,5} = \frac{41}{24}.$$

A hátralévő feladatoknál minden esetben (hol egyszerűbben, hol bonyolultabban) az egyes formulákat kell k -ban maximalizálni.

25. Határozza meg a binomiális eloszlás móduszát!

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow \text{módusz: } k = \lfloor (n+1)p \rfloor \text{ (ha ez egész, akkor } (n+1)p - 1 \text{ is módusz)}$$

26. Határozza meg a geometriai eloszlás móduszát!

$$P(X = k) = (1-p)^k p \Rightarrow \text{módusz: } k = 0$$

27. Határozza meg a Poisson eloszlás móduszát!

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow \text{módusz: } k = \lfloor \lambda \rfloor \text{ (ha ez egész, akkor } \lambda - 1 \text{ is módusz)}$$

28. Határozza meg a hipergeometrikus eloszlás móduszát!

$$P(X = k) = \frac{\binom{A}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \Rightarrow \text{módusz: } \lfloor \frac{(n+1)(A+1)}{A+B+2} \rfloor$$