Matematika A4
V. gyakorlat

1. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú részintervallumba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$;

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}.$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}.$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}.$$

Feladatok:

1. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

2. Mi a valószínűsége, hogy a $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?

3. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $1/4$ területegységnél?

4. *Buffon-féle tűprobléma avagy hogyan közelítsük meg a π-t tű és papír segítségével - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

5. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0,1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

6. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

7. Mi a valószínűsége, hogy független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$?

8. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0,1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

9. *Bertrand-paradoxon - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

   a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

   b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

   c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

2. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket: $F(x) = \mathbb{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,

2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \le F(x_2)$,

3. mindenhol balról folytonos.

Amikor $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos: ekkor X eloszlását *folytonosnak* nevezzük. Ebben az esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

Minden olyan x pontban, ahol f folytonos, fennáll, hogy $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a,b) vagy $[a,b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \ge 0$ minden x-re,

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Feladatok:

10. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a,b) intervallumon. Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?

11. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0.)

a)

$$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

b)

$$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

c)

$$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

d)

$$I(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

12. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

b)

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3}\sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}\ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

13. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

14. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

15. A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

16. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$?

17. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

18. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi a kivetített pont sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy-eloszlás.)*

19. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi az így kapott pont eloszlás- és sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

20. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

21. Határozd meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényét az alábbi valószínűségi változóknak, továbbá gondolkodjunk el azon, hogy ha csak a sűrűségfüggvényt ismernénk, hogyan tudnánk megmondani az eloszlásfüggvényt:

    a) $X = 5RND$
    b) $X = 2 + 5RND$
    c) $X = -2 + 5RND$
    d) $X = RND^2$
    e) $X = RND^{-2}$
    f) $X = RND^c$ ahol c egy pozitív konstans
    g) $X = RND^c$ ahol c egy negatív konstans
    h) $X = \ln RND$
    i) $X = -\ln RND$
    j) $X = 25\sqrt{RND}$
    k) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton növekvő folytonosan differenciálható függvény
    l) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton csökkenő folytonosan differenciálható függvény

22. Legyen az X egy tetszőleges folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $F(x)$ egy $[A, B]$ intervallumon (A lehet $-\infty$, B lehet ∞) szigorúan növekvő, és $F(A) = 0$, $F(B) = 1$. Határozzuk meg $F^{-1}(U)$ eloszlását! (Általánosított inverz eloszlásfüggvény használatával nincs szükség a feltevésekre, de ezzel részletesebben nem foglalkozunk).