Matematika A4
V. gyakorlat megoldása

1. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú részintervallumba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$;

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}.$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}.$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}.$$

Feladatok:

1. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

   A háromszög magassága $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, így a háromszög területe $T_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. A beírható kör sugara a magasság egyharmada: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Ebből a kör területe $T_2 = (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2\pi$. Így a keresett valószínűség: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. Mi a valószínűsége, hogy a $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?
   A feltételek szerint $x \leq 2y$. Így a kedvező síkrész a négyzet $y = \frac{x}{2}$ egyenes feletti része. Ennek területe $\frac{3}{4}$. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is $\frac{3}{4}$.

   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?
   A feltételek szerint $x^2 < y$. Így a kedvező síkrész a négyzet $y = x^2$ parabola feletti része. Ennek területe $1 - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is $\frac{2}{3}$.

3. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $1/4$ területegységnél?

A két oldalhossz mint pontpár az egységnégyzeten egyenletes eloszlású. A gyakorlaton excel szimuláció segített a kedvező síkrész megtalálásában és az azzal való számolásban. A feltételek szerint $K = 2x + 2y > 2$ és $T = xy < \frac{1}{4}$. Így a kedvező síkrész a négyzet $y = x - 1$ egyenes feletti és az $y = \frac{1}{4x}$ hiperbola alatti része (a két rész metszete). A hiperbola alatti terület $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} ln(4)$. A kedvező területet ebből úgy kapjuk, hogy kivonjuk belőle az alsó $\frac{3}{4}$ hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét és hozzáadjuk a felső $\frac{1}{4}$ hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét: $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{(\frac{3}{4})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{4})^2}{2}$, ami $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{1}{4}$. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{1}{4}$.

4. *Buffon-féle tűprobléma avagy hogyan közelítsük meg a π-t tű és papír segítségével - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

   Vetier András angol nyelvű elektronikus jegyzetében az első fejezet 20-21. oldalán megtalálható a megoldás excel szimulációk társaságában.

5. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0, 1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

   Érdemes a pontokat színesnek képzelni. Ha lerögzítjük, hogy melyik színű pont melyek intervallumba esik akkor ennek a valószínűsége $(\frac{1}{3})^3$. Ezt meg kell szorozni a lehetséges sorrendekkel(permutáció), így a megoldás $3!(\frac{1}{3})^3 = \frac{6}{27}$.

6. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?
   Az egységnégyzeten van egyenletes eloszlásunk. Itt a kedvező síkrészt érdemes külön keresni az $y > x$ és az $y < x$ esetekben. Előbb tegyük föl, hogy $y > x$. Ez azt jelenti, hogy most az $y = x$ egyenes felett keressük meg a kedvező pontpárokat. Ekkor a feltétel $y - x < x$-re egyszerűsödik, ami ekvivalens az $y < 2x$ feltétellel. Így ebben az esetben az egységnégyzet $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek közti pontjai kedvezőek. Tegyük most fel, hogy $y < x$. Ekkor a feltétel $x - y < y$-re egyszerűsödik, ami ekvivalens az $y > \frac{x}{2}$ feltétellel, így ebben az esetben az egységnégyzet $y = x$ és $y = \frac{x}{2}$ egyenesek közti pontjai kedvezőek. Összességében az $y = 2x$ és $y = \frac{x}{2}$ egyenesek határolta síkrész a kedvező. Ennek a területét megkapjuk ha a négyzet egységnyi területéből levonjuk a két oldalsó háromszög területét. Így kedvező síkrész területe $\frac{1}{2}$, ami tekinvte, hogy egységnégyzettel dolgozunk megegyezik a kérdezett valószínűséggel. Megjegyzem, hogy az $y = x$ egyenesre esés valószínűsége 0, ezért nem foglalkoztunk ezzel a lehetőséggel.

   b) A két szám három darabra vágja a $[0, 1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?
   Itt is a kedvező síkrészt érdemes külön keresni az $y > x$ és az $y < x$ esetekben. Előbb tegyük föl, hogy $y > x$. Ekkor a szakaszok hosszai $x, y - x, 1 - y$. Ilyen hosszokkal pontosan akkor szerkeszthető háromszög ha bármely kettőnek az összege nagyobb, mint a harmadik, vagyis ha $x + y - x > 1 - y$, $y - x + 1 - y > x$, $x + 1 - y > y - x$, vagy ekvivalensen ha $y > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$. Ez egy $\frac{1}{8}$ területű háromszög az $y = x$ egyenes feletti részen. Ha az $y = x$ egyenes alatti részen vizsgálódunk, vagyis feltesszük, hogy $y < x$, akkor szimmetria miatt itt is egy $\frac{1}{8}$ területű háromszög lesz a kedvező síkrész. Figyelembe véve, hogy az egységnégyzet területe 1, a kérdezett valószínűség $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

7. Mi a valószínűsége, hogy független, $(0, 1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$?

   Az egységnégyzeten van egyenletes eloszlásunk, a vízszintes tengely adja az RND_1-t a függőleges pedig az RND_2-t. $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2}) = P((RND_1)^{\frac{m}{n}} < RND_2)$. Így a kedvező síkrész az $y = x^{\frac{m}{n}}$ függvény feletti terület, ami $1 - \int_0^1 x^{\frac{m}{n}} dx = 1 - \frac{1}{\frac{m}{n}+1}$. Így a kérdezett valószínűség $1 - \frac{1}{\frac{m}{n}+1} = 1 - \frac{n}{n+m} = \frac{m}{n+m}$.

8. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

Itt az egységkockán belül a kedvező térrészt kellene megtalálni. Ez nem egyszerű feladat. Van egy másik, ennél egyszerűbb megoldás, de ti még a szükséges eszközöket nem ismeritek. Viszont excel segítségével numerikusan könnyen közelíthető a valószínűség. Egy sorba egymás után felvesztek három Rand()-ot, majd ellenőrzitek IF, AND, OR függvények segítségével, hogy teljesülnek-e a feladatban előírt feltételek, majd ezt a sort megsokszorozva, relatív gyakorisággal közelíthető a kérdezett valószínűség.

9. *Bertrand-paradoxon - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

   a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

   b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

   c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

   Ez a feladat alkalmas arra, hogy összezavarjon titeket. Aki bizonytalannak érzi a tudását az inkább hagyja ki ezt a feladatot. Az angol nyelvű wikipédián (http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)) mindhárom hozzáállásból adódó megoldást megtaláljátok. A három hozzáállás különböző eredményre vezet. Ez csak látszólag paradoxon. A lényeg ott van, hogy a "kör húrjai közül véletlenszerűen választva" kifejezés nem határozza meg pontosan a véletlen választás módját. A három megoldás három különböző pontosabb meghatározáson alapul. A gyakorlatban ha hasonló problémával szembesülünk, akkor ki kellene kísérletezni, hogy a három lehetőség közül most éppen melyikkel is van dolgunk.

2. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket: $F(x) = \mathbb{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. mindenhol balról folytonos.

Amikor $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos: ekkor X eloszlását *folytonosnak* nevezzük. Ebben az esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}$.

Minden olyan x pontban, ahol f folytonos, fennáll, hogy $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Feladatok:

10. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon. Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?

    Eloszlásfüggvény felírást érdemes úgy kezdeni, hogy megvizsgáljuk a triviális eseteket. Itt ha x kisebb a-nál, akkor 0 annak a valószínűsége, hogy X kisebb, mint x. Ha pedig x nagyobb, mint b, akkor 1 valószínűséggel kisebb X a x-nél. Ha x a és b között van, akkor pedig kedvező intervallum hossza osztva a teljes intervallum hosszával kiszámolhatjuk a kérdéses valószínűséget (az a és b közötti intervallumon van egy egyenletes eloszlású valószínűségi változónk). Így az eloszlásfüggvény és deriváltja a sűrűségfüggvény a következőképpen írható:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & ha\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ha\ x \in [a, b] \\ 1 & ha\ x > b \end{array} \right\},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & ha\ x < a \\ \frac{1}{b-a} & ha\ x \in [a, b] \\ 0 & ha\ x > b \end{array} \right\}$$

11. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0.)

    a)

$$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

    Mindegyik feladatnál a fent leírt feltételeket kell ellenőrizni. Ez nem eloszlásfüggvény, ugyanis nem igaz, hogy monton nőne. Megjegyzés: A definícióból látszik, hogy az eloszlásfüggvény mindig 0 és 1 között van, ez sem teljesül.

    b)

$$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

    ∞-ben 2-höz tart, tehát nem lehet eloszlásfüggvény.

    c)

$$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

    Minden teljesül (mindenhol folytonos, $(-\infty)$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart, monoton növekvő, és mindenhol folytonos), ezért ez eloszlásfüggvény.

    d)

$$I(x) = \frac{x}{4}(4 - x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

    A folytonosság szempontjából lehetséges gyenge pont a 0 és a 2, de ha megnézzük ott is folytonos. Egyszerű deriválással kijön, hogy monoton növekvő. A $+/-\infty$-ben jól viselkedik, mivel mindkét helyen egy idő után a kívánt konstans lesz, így ez eloszlásfüggvény.

12. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

    a)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

    Két feltételnek kell teljesülnie f-re nézve: mindenhol nemnegatívnak kell lennie, és a teljes számegyenesen vett integrálja pedig legyen 1. Mivel a függvény 1-nél kisebb helyeken 0, ezért az integrált a következő képpen számolhatjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{t}dt = \infty \neq 1$$

    (Az $\frac{2}{t}$ primitívfüggvénye $2ln(t)$, amely végtelenhez tartva végtelenhez tart.)
    Így a függvény nem sűrűségfüggvény.

b)

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

$g(x)$ mindenhol nemnegatív, de az integrálja a teljes számegyenesen nem lesz 1, így nem sűrűségfüggvény.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{\sin(t)}{2}dt = \left[\frac{-\cos(x)}{2}\right]_0^2 \approx 0.708073 \neq 1$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3}\sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}\ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

A nemnegativitást elég gyorsan lehet látni. A teljes integrál pedig 1 lesz, tehát ez egy sűrűségfüggvény.

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t/2)}{3}dt + \int_{-\infty}^{0} 3^{t-1}\ln(3)dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

A függvény nemnegatív, a teljes intervallumon vett integrálja pedig 1, így sűrűségfüggvény.

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t)dt = \int_{0}^{\infty} 2e^{-2t}dt = 1$$

13. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

   Számoljunk ki egy konkrét értéket! Mi a valószínűsége, hogy a lövedék egy $r/2$ sugarú körbe esik? Ez egyeneletes eloszlás az r sugarú körlapon, így a válasz az $r/2$ és az r sugarú kör aránya (a két területet elosztjuk egymással):

$$\frac{(r/2)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4}$$

   Szeretnénk kiszámolni az eloszlásfüggvényt. X-szel jelölve a távolságot a kör közepétől és $F(x)$-szel az eloszlásfüggvényt. Ha $x \in [0, r]$ akkor:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\textit{x sugarú kör területe}}{\textit{a teljes körlap}} = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2}$$

   Az $F(x)$ függvény így fog kinézni:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2} & \textit{ha } x \in [0, r] \\ 1 & \textit{ha } x > r \end{array} \right\}$$

   A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja. Így a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{2x}{r^2} & \textit{ha } x \in [0, r] \\ 0 & \textit{egyébként} \end{array} \right\}$$

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik? A következő számolások ekvivalensek, mindegyik jó:

$$F(\frac{3r}{4}) - F(\frac{r}{2}) = \int\limits_{r/2}^{3r/4} f(t)dt = \frac{5}{16}$$

14. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?
Nézzünk először egy konkrét példát! Mi a valószínűsége, hogy $\frac{l}{4}$-nél rövidebb lesz a rövidebbik ropi hossza? Könnyen látható, hogy az l hosszúságú ropin ha a bal $\frac{l}{4}$ részén vagy ha a jobb $\frac{l}{4}$ részén lesz a törés, akkor a rövidebbik rész hossza kisebb lesz $\frac{l}{4}$-nél. Az is könnyen látszódik, hogy ha a törés mindkét oldaltól legalább $\frac{l}{4}$ távol van, akkor a rövidebbik ropi hossza nagyobb lesz $\frac{l}{4}$-nél. X-szel jelölve a rövidebb ropi hosszát:

$$P(X < \frac{l}{4}) = \frac{2\frac{l}{4}}{l} = \frac{1}{2}$$

Általánosan, rögzített $x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$-re pontosan akkor lesz a rövidebbik darab hossza kisebb x-nél, ha a törés helye az l hosszúságú ropin vagy 0 és x között van, vagy $l - x$ és l között. Ez két x hosszú szakasz, így:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{2x}{l}$$

Tetszőleges x-re:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{2x}{l} & \textit{ha } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \\ 1 & \textit{ha } x > \frac{l}{2} \end{array} \right\}$$

15. A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?
A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

$$\begin{aligned} &F(x) = P(\textit{nagyság szerint 3. pont } < x) = \\ &P(\textit{mind a négy pont } < x) + P(\textit{pontosan 3 pont } < x \textit{ és egy pont nagyobb } x\textit{-nél}) = \\ &\qquad\qquad x^4 + \binom{4}{3} x^3(1-x) = x^4 - 4x^3(1-x), \end{aligned}$$

ha $x \in [0, 1]$, egyébként 1, ha $x > 1$ és 0, ha $x < 0$.
A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$f(x) = -12x^2 + 20x^3 \quad \textit{ha } x \in [0,1]\textit{, egyébként 0}$$

És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?
Az előzőek alapján ha $x < 0$, akkor 0, ha $x > 1$, akkor 1, ha pedig $x \in [0, 1]$ akkor:

$$\begin{aligned} &F_2(x) = P(\textit{nagyság szerinti 6. pont} < x) = \\ &\qquad 1 - \sum_{k=0}^{5} P(\textit{pontosan k. pont} < x) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} x^k (1-x)^{10-k} \end{aligned}$$

16. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$?
Rögzítsünk egy x számot, és jelöljük be azon pontok halmazát, amelyek x-nél közelebb vannak valamelyik oldalhoz. Ezt elég könnyű megtenni, csak x távolságra párhuzamost kell húznunk minden egyes oldallal. A kérdéses síkidom egy keret lesz úgy, hogy egy $(1-2x)(1-2x)$ nagyságú négyzet fog a közepéből hiányozni. Így:

$$F(x) = P(X < x) = 1 - (1-2x)(1-2x) = 4x(1-x)$$

ha $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, egyébként 1, ha $x > \frac{1}{2}$ és 0, ha $x < 0$. Annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $\frac{1}{4}$:

$$P(X > \frac{1}{4}) = 1 - P(X < \frac{1}{4}) = 1 - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

17. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

Csak a percekkel számolunk, hiszen mindig 13 órával számolunk. A hétköznapi és hétvégi eloszlás is egyenletes lesz, csak más paraméterekkel.

$$F_{\textit{hétköznap}}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x}{15} & \textit{ha } x \in [0, 15] \\ 1 & \textit{ha } x > 15 \end{array} \right\}$$

$$F_{\textit{hétvége}}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x}{10} & \textit{ha } x \in [0, 10] \\ 1 & \textit{ha } x > 10 \end{array} \right\}$$

$$F(x) = P(X < x) \overset{\textit{(teljes valószínűség tétele)}}{=} P(\textit{hétköznap})P(X < x|\textit{hétköznap}) +$$
$$P(\textit{hétvége})P(X < x|\textit{hétvége}) = \frac{2}{3}F_{\textit{hétköznap}}(x) + \frac{1}{3}F_{\textit{hétvége}}(x) =$$

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{2}{3}\frac{x}{15} + \frac{1}{3}\frac{x}{10} & \textit{ha } x \in [0, 10) \\ \frac{2}{3}\frac{x}{15} & \textit{ha } x \in [10, 15] \\ 1 & \textit{ha } x > 15 \end{array} \right\}$$

A sűrűségfüggvényhez csak deriválnunk kell:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{7}{90} & \textit{ha } x \in [0, 10) \\ \frac{2}{45} & \textit{ha } x \in [10, 15] \\ 0 & \textit{egyébként} \end{array} \right\}$$

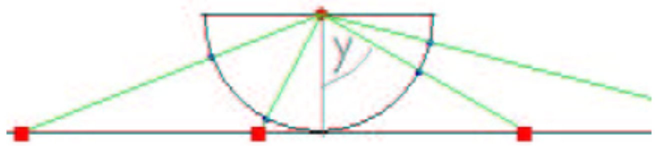
Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 5 percet várunk?

$$P(X < 5) = F(5) = \frac{2}{3}\frac{5}{15} + \frac{1}{3}\frac{5}{10} = \frac{7}{18}$$

18. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely

egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi a kivetített pont sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy-eloszlás.)*

Az alábbi ábra mutatja, hogy miről van szó. A félköríven egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot (ezek a kis kék pontok), majd a kör középpontjából levetítjük őket (ezek a zöld egyenesek), majd megnézzük a metszéspontot a számegyenessel (ezek lesznek a nagy piros négyzetek). A levetített pontok (piros négyzetek) eloszlását hívjuk Cauchy eloszlásnak. Választunk egy pontot az egyenletesen a félköríven. A kör középpontjából



1. ábra. Cauchy eloszlás

nézve szöget rendelhetünk ezekhez a pontokhoz. Jelöljük Y-nal a ezt a szöget úgy, ahogyan az ábrán látható (figyelem, ez a szög itt lehet negatív is). Így Y egyenletes eloszlású lesz $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-n. X-szel jelölve a levetített pontot igaz lesz, hogy $X = \tan(Y)$ (a számegyenes origója az érintkezési pont). A kérdéses eloszlásfüggvény:

$$F(x) = P(X < x) = P(\tan(Y) < x) \overset{\text{(mivel arctan mon. nő)}}{=} P(Y < \arctan(x))$$

Ez igaz, hiszen ha van két számom, pl: 2 és 3, és igaz, hogy $2 < 3$, akkor egy szigorúan monoton növekvő függvényt alkalmazva mindkét oldalon, például $3x+10$-et, akkor továbbra is igaz lesz, hogy $3\cdot2+10 < 3\cdot3+10$. Ezt csináltuk most is, az arctangenst alkalmaztuk mindkét oldalon. Y eloszlásfüggvényét ismerjük, így:

$$P(Y < \arctan(x)) = \frac{\arctan(x) - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$$

A sűrűségfüggvényhez deriválnunk kell:

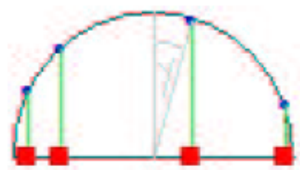
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Megjegyzem, hogy a felső képletek tetszőleges valós x-re érvényesek, vagyis most nincsenek triviális esetek, más szóhasználattal a valószínűségi változónk nem korlátos.

19. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi az így kapott pont eloszlás- és sűrűségfüggvénye? Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

   A piros négyzetek eloszlásást kell meghatározni. Y szög legyen az ábra szerint (itt is lehet Y negatív is). Az Y eloszlása egyenletes lesz a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-n. X-szel jelölve a levetített pont képét $X = \sin(Y)$. Mivel az eloszlásunk a $[-1, 1]$-ra koncentrált, ezért ha $x < -1$ akkor $F(x) = 0$, ha $x > 1$, akkor $F(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$ esetén pedig az előző feladathoz hasonlóan:

$$F(x) = P(X < x) = P(\sin(Y) < x) \overset{\text{(mivel arcsin mon. nő } (-\pi/2,\pi/2)\text{-n)}}{=} P(Y < \arcsin(x)) = \frac{\arcsin(x) - (-\frac{\pi}{2})}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin(x)}{\pi}$$



2. ábra. Arcsinusz eloszlása

Így a sűrűségfüggvény $x \in (-1,1)$ esetén (egyébként 0):

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

A kérdésekre a válasz:

$$P(\textit{a pont a (-0.5,0.5) intervallumba esik}) = P(X < 0.5) - P(X < -0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = \frac{1}{3}$$

$$P(X < 0) = F(0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X < \frac{\sqrt{3}}{2}) = F(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{3}$$

20. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1,1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0,1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? *Legyen először X egyenletes a $[-1,1]$-n. Ekkor X eloszlásfüggvénye*

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \textit{ha } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \textit{ha } x \in [-1,1] \\ 1 & \textit{ha } x > 1 \end{Bmatrix}$$

Most kiszámoljuk X^3 $G(x)$ eloszlásfüggvényét és $g(x)$ sűrűségfüggvényét. Legyen $x \in [-1,1]$ (ez az érdekes eset). Ekkor használva a harmadikra emelés szigorú monotonságát és azt, hogy $\sqrt[3]{x}$ a -1 és az 1 közé esik ha $x \in [-1,1]$

$$G(x) = P(X^3 < x) = P(X < \sqrt[3]{x}) = F(\sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{2}.$$

Így a kérdéses függvények:

$$G(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \textit{ha } x < -1 \\ \frac{\sqrt[3]{x}+1}{2} & \textit{ha } x \in [-1,1] \\ 1 & \textit{ha } x > 1 \end{Bmatrix}, \; g(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \textit{ha } x < -1 \\ \frac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}} & \textit{ha } x \in [-1,1] \\ 0 & \textit{ha } x > 1 \end{Bmatrix}.$$

Végezetül $P(X^3 < 0.5) = G(0.5) = \frac{\sqrt[3]{0.5}+1}{2}$. Ha X egyenletes a $[0,1]$-n, akkor ehhez hasonlóan kell a feladatot megoldani, 21-es feladat is szorosan kötődik.

21. Határozd meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényét az alábbi valószínűségi változóknak, továbbá gondolkodjunk el azon, hogy ha csak a sűrűségfüggvényt ismernénk, hogyan tudnánk megmondani az eloszlásfüggvényt:

A megoldásban $F(x)$ jelöli RND eloszlásfüggvényét:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ x & \textit{ha } x \in [0,1] \\ 1 & \textit{ha } x > 1 \end{array} \right\}.$$

$G(x)$ és $g(x)$ pedig mindig a kiszámolandó eloszlás- illetve sűrűségfüggvényt jelöli. Jó tudni azt is, hogy ha egy folytonos valószínűségi változó eloszlás- vagy sűrűségfüggvényét különböző tartományokon különböző képlettel kell megadnunk, akkor annak nincs jelentősége, hogy melyik ágon engedjük meg az egyenlőséget. Megjegyezzük azt is, hogy érdemes azzal kezdeni, hogy meghatározzuk a kérdéses valószínűségi változó lehetséges értékeit, ezzel meghatározva a triviális eseteket.

a) $X = 5RND$

Meg lehet oldani a korábbi módszerekkel is, de úgy is, hogy ráérzünk $5RND$ egyenletes eloszlású a $[0,5]$-n, így az eloszlás- és sűrségfüggvénye

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \textit{ha } x \in [0,5] \\ 1 & \textit{ha } x > 5 \end{array} \right\},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{1}{5} & \textit{ha } x \in [0,5] \\ 0 & \textit{ha } x > 5 \end{array} \right\}.$$

b) $X = 2 + 5RND$

Most $[2,7]$-n van egyenletes eloszlásunk, így

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 2 \\ \frac{x-2}{5} & \textit{ha } x \in [2,7] \\ 1 & \textit{ha } x > 7 \end{array} \right\},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 2 \\ \frac{1}{5} & \textit{ha } x \in [2,7] \\ 0 & \textit{ha } x > 7 \end{array} \right\}.$$

c) $X = -2 + 5RND$

Most $[-2,3]$-n van egyenletes eloszlásunk, így

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < -2 \\ \frac{x+2}{5} & \textit{ha } x \in [-2,3] \\ 1 & \textit{ha } x > 3 \end{array} \right\},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < -2 \\ \frac{1}{5} & \textit{ha } x \in [-2,3] \\ 0 & \textit{ha } x > 3 \end{array} \right\}.$$

d) $X = RND^2$

Speciális esete az f alfeladatnak, előadáson szerepelt.

e) $X = RND^{-2}$

Speciális esete a g alfeladatnak.

f) $X = RND^c$ ahol c egy pozitív konstans

Legyen $x \in [0,1]$ (ez az érdekes eset). Ekkor használva a c pozitív hatványra emelés szigorú monotonságát a $[0,1]$-n és azt, hogy $x^{\frac{1}{c}}$ 0 és 1 közé esik (innen tudjuk, hogy az $F(x)$ középső ágát kell használni)

$$G(x) = P(RND^c < x) = P(RND < x^{\frac{1}{c}}) = F(x^{\frac{1}{c}}) = x^{\frac{1}{c}}.$$

Így a kérdéses függvények:

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x \le 0 \\ x^{\frac{1}{c}} & \textit{ha } x \in (0,1) \\ 1 & \textit{ha } x \ge 1 \end{array} \right\},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x \le 0 \\ \frac{1}{c}x^{\frac{1}{c}-1} & \textit{ha } x \in (0,1) \\ 0 & \textit{ha } x \ge 1 \end{array} \right\}.$$

g) $X = RND^c$ ahol c egy negatív konstans

Legyen $x > 1$ (ez az érdekes eset). Ekkor használva a c negatív hatványra emelés szigorú monotonságát

$$G(x) = P(RND^c < x) = P(RND > x^{\frac{1}{c}}) = 1 - F(x^{\frac{1}{c}}) = 1 - x^{\frac{1}{c}}.$$

Így a kérdéses függvények:

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ 1 - x^{\frac{1}{c}} & \text{ha } x > 1 \end{array} \right\}, \; g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ -\frac{1}{c} x^{\frac{1}{c}-1} & \text{ha } x > 1 \end{array} \right\}.$$

h) $X = \ln RND$

Legyen $x < 0$ (ez az érdekes eset). Későbbi hivatkozás miatt most kivételesen $H(x)$ és $h(x)$ jelöli a kiszámolandó eloszlás- illetve sűrűségfüggvényt.

$$H(x) = P(\ln RND < x) = P(RND < e^x) = F(e^x) = e^x.$$

Így a kérdéses függvények:

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{cc} e^x & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{array} \right\}, \; h(x) = \left\{ \begin{array}{cc} e^x & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

i) $X = -\ln RND$ *A változatosság kedvéért most az előző pontban kiszámolt eloszlásfüggvényre fogunk támaszkodni. Legyen $x \geq 0$ (ez az érdekes eset).*

$$G(x) = P(-\ln RND < x) = P(\ln RND > -x) = 1 - H(-x) = 1 - e^{-x}.$$

Így a kérdéses függvények:

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{ha } x \geq 0 \end{array} \right\}, \; g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x < 0 \\ e^{-x} & \text{ha } x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

j) $X = 25\sqrt{RND}$

Az eddigiekhez hasonlóan dolgozhatunk. A kérdéses függvények:

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x^2}{25^2} & \text{ha } x \in [0, 25] \\ 1 & \text{ha } x > 25 \end{array} \right\}, \; g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{2x}{25^2} & \text{ha } x \in [0, 25] \\ 0 & \text{ha } x > 1 \end{array} \right\}.$$

k) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton növekvő folytonosan differenciálható függvény

Az eddigiekhez hasonlóan dolgozhatunk itt is.

$$G(x) = P(t(RND) < x) = P(RND < t^{-1}(x)) = F(t^{-1}(x)).$$

Szándékosan nincs behelyettesítve az $F(x)$ függvény a fenti képletbe, mert a $t^{-1}(x)$-en múlik, hogy melyik ágát kellene használni.

$$g(x) = f(t^{-1}(x))(t^{-1}(x))',$$

ahol f az RND sűrűségfüggvényét jelöli. A képlet egyszerűen a deriválás láncszabályának a következménye.

l) $X = t(RND)$ ahol $y = t(x)$ egy szigorúan monoton csökkenő folytonosan differenciálható függvény
Az előzőhöz hasonlóan

$$G(x) = P(t(RND) < x) = P(RND > t^{-1}(x)) = 1 - F(t^{-1}(x)).$$

Szándékosan nincs behelyettesítve az $F(x)$ függvény a fenti képletbe, mert a $t^{-1}(x)$-en múlik, hogy melyik ágát kellene használni.

$$g(x) = -f(t^{-1}(x))(t^{-1}(x))',$$

ahol f az RND sűrűségfüggvényét jelöli. A képlet egyszerűen a deriválás láncszabályának a következménye.
A feladat utal arra, hogy nem árt tudni, hogy egy $g(x)$ sűrűségfüggvényből, a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ képlettel lehet eloszlásfüggvényt számolni. De a $g(x)$ határozatlan integráljával is dolgozhatunk ha a belépő konstanst az eloszlásfüggvény valamelyik tulajdonságából kitaláljuk.

22. Legyen az X egy tetszőleges folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $F(x)$ egy $[A, B]$ intervallumon (A lehet $-\infty$, B lehet ∞) szigorúan növekvő, és $F(A) = 0$, $F(B) = 1$. Határozzuk meg $F^{-1}(U)$ eloszlását! (Általánosított inverz eloszlásfüggvény használatával nincs szükség a feltevésekre, de ezzel részletesebben nem foglalkozunk).

Jelöljük $G(x)$-el $F^{-1}(U)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Használva a szigorú monotonságot és azt, hogy U eloszlásfüggvénye x ha $x \in [0, 1]$ adódik:

$$G(x) = P(F^{-1}(U) < x) = P(U < F(x)) = F(x).$$

Vagyis $F^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye épp $F(x)$. Ebből látszik, hogy ha adott egy $F(x)$ eloszlásfüggvény a megfelelő feltételekkel, akkor ha az inverzébe Rand()-ot helyettesítünk excelben akkor pont egy $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változót szimulálunk.