

# Hatodik A4 gyakorlat

## 1. Folytonos várható érték és exponenciális eloszlás

1. A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben (feltesszük, hogy az eloszlásfüggvény folytonosan differenciálható,  $f(x)$  jelöli a sűrűségfüggvényt):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

$$\text{és tetszőleges } t(X) \text{ függvényének várható értéke: } \mathbb{E}(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx.$$

### 2. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő:  $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$  minden  $s, t \geq 0$  esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él”, a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.

Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

*Megjegyzés:*

Egy  $X$  eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha  $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) < \mathbb{P}(X > s)$  teljesül rá. *Példa:* egy elhasznált alkatrész élettartama.

Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben  $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) > \mathbb{P}(X > s)$ . *Példa:* egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.

A  $\lambda$  paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , eloszlásfüggvénye:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ha  $x > 0$ .

A  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke:  $1/\lambda$ . Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

### Feladatok

1. Legyen  $X^2$  egyenletes a  $[0, 1]$ -en. Mi lesz  $X$  eloszlása? Mi a várható értéke?
2. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye  $f(x) = \frac{2}{x^3}$ , ha  $x > 1$ . Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  (ha  $x > 1$ ) vagy a bergengócot?
3. Vezesd le, hogy egy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke  $\frac{1}{\lambda}$ !
4. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a következő  $t$  percen belül jön busz  $1 - e^{-8t}$ . Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?
5. Egy irodában átlag 5 percnként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve  $\frac{1}{3}$  paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?
7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?
8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél  $\frac{2}{3}$  annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?
9. Bizonyítsuk be, hogy az
- $$\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2} \quad \text{ha } x \geq 0,$$
- $$\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}} \quad \text{ha } y \geq 0,$$
- eloszlásfüggvényekkel megadott  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!