Hatodik A4 gyakorlat

1. Folytonos várható érték és exponenciális eloszlás

1. A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben (feltesszük, hogy az eloszlásfüggvény folytonosan differenciálható, f(x) jelöli a sűrűségfüggvényt):
   $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$
   és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $\mathbb{E}(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx.$

2. *Exponenciális eloszlás*

   Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él”, a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.
   Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
   Megjegyzés:
   Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
   Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$. *Példa*: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.
   A λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.
   A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

Feladatok

1. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a várható értéke?

   Megoldás: Egyenletes eloszlás esetén: $\mathbb{P}(X^2 < x) = x$, *így* $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X^2 < x^2) = x^2$, *ha* $0 < x < 1$. *(Kihasználtuk, hogy a* $[0, 1]$ *intervallumon vagyunk, így a függvény monoton.)*
   Ebből a sűrűségfüggvény könnyen adódik deriválással: $f(x) = F'(x) = 2x$, *ha* $0 < x < 1$.
   Innen a várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

2. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot?

Megoldás: Szerintem február 1. 6 *nappal van január 26. után, azaz a keresett valószínűség* $\mathbb{P}(X > 6)$. *Így*

$$\mathbb{P}(X > 6) = \int_6^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_6^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_6^\infty = \frac{1}{36}.$$

Azt a DVD-t érdemesebb megvenni, aminek nagyobb az átlagos élettartama, azaz aminek nagyobb a várható értéke. Így ki kell számolnunk a két várható értékeket.
Bergengóc DVD élettartama:

$$\mathbb{E}(X_{\textit{Bergengóc}}) = \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^\infty = 2.$$

Dél-szaharai DVD élettartama:

$$\mathbb{E}(X_{\textit{Szahara}}) = \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \infty.$$

Azaz a Dél-szaharai DVD-t érdemes megvenni.

3. Vezesd le, hogy egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\lambda}$!

   Megoldás: A λ *exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:* $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, *ha* $x > 0$. *A definíció alapján*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{\lambda}.$$

   Az integrálás során egyszer kellett parciálisan integrálni.

4. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a követkző t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

   Megoldás: A feladat egyszerű: megadták az eloszlásfüggvényt.

$$\mathbb{P}(\textit{ több, mint 10 percet várunk}) = P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-8\cdot 10}) = e^{-80}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\textit{legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et várunk}) &= \mathbb{P}(5 < X < 10) = F(10) - F(5) = \\ &= (1 - e^{-8\cdot 10}) - (1 - e^{-8\cdot 5}) = e^{-80} - e^{-40}\end{aligned}$$

   A várható érték meghatározásához szükségünk lesz a sűrűségfüggvényre!

$$f(x) = 8e^{-8t} \quad \textit{ha} \quad t > 0$$

   A várható érték (az integrált parciálisan kell kiszámolni):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t \cdot 8e^{-8t} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\textit{sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet}) \overset{\textit{feltételes valószínűség}}{=}$$
$$\frac{\mathbb{P}(X > 4 \textit{ és } X > 14)}{\mathbb{P}(X > 4)} = \frac{\mathbb{P}(X > 14)}{\mathbb{P}(X > 4)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < 14)}{1 - \mathbb{P}(X < 4)} = \frac{e^{-112}}{e^{-32}} = e^{-80}$$

Tekintve, hogy az eloszlásfüggvény alapján itt egy 8 paraméterű exponenciális eloszlásról van szó, így a fenti valószínűség kiszámítása során használhatjuk az eloszlás örökifjú tulajdonságát, azaz

$$\mathbb{P}(X > 14|X > 4) = \mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-8\cdot 10}) = e^{-80}$$

5. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

   Megoldás: Jelölje X a híváok között eltelt időt. Ekkor a feladat szövege alapján X exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel. A feladat szövege alapján $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$, azaz $\lambda = \frac{1}{5}$. Így az eloszlásfüggvény $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{5}x}$, ha $x > 0$.
   Annak a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik, ha Az utolsó hívás 4 perce volt (azaz az időtartam több, mint 4):

$$\mathbb{P}(5 < X < 10|X > 4) = \mathbb{P}(1 < X < 6) = \mathbb{P}(X < 6) - \mathbb{P}(X < 1) = F(6) - F(1) = \\ = \left(1 - e^{-\frac{1}{5}6}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{5}1}\right) = e^{-\frac{1}{5}} - e^{-\frac{6}{5}}.$$

   Itt az első egyenlőségnél használtuk az exponenciális eloszls örökifjú tulajdonságát. (De aki ezt nem ismeri fel ezt a tulajdonságot, az a feltételes valószínűség definíciója alapján is számolhat és ugyanezt az eredményt kapja.)

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

   Megoldás: Ebben az esetben az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$, ha $x > 0$.
   Annak a valószínűsége, hogy több, mint 5 percet kell várnom,

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}5}\right) = e^{-\frac{5}{3}}.$$

   Annak a valószínűsége, hogy több, mint 7 percig kell várnom, ha már két perce beszél (azaz a beszélgetés hossza több, mint 2):

$$\mathbb{P}(X > 7|X > 2) = \mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}5}\right) = e^{-\frac{5}{3}}.$$

   Itt az első egyenlőségnél használtuk az exponenciális eloszls örökifjú tulajdonságát. (De aki ezt nem ismeri fel ezt a tulajdonságot, az a feltételes valószínűség definíciója alapján is számolhat és ugyanezt az eredményt kapja.)

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ. Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$.
   A feladat szövege szerint $F(1000) = 0,02$, azaz $1 - e^{-1000\lambda} = 0,02$, amiből $\lambda = \frac{-\ln 0,98}{1000}$.
   Az exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, így a feladat kérdése a következő:

$$\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = 1 - \mathbb{P}(X < \frac{1}{\lambda}) = 1 - F(\frac{1}{\lambda}) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}\right) = e^{-1}.$$

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

   Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ. Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$. A feladat szövege szerint $F(2000) = \frac{1}{3}$, azaz $1 - e^{-2000\lambda} = \frac{1}{3}$, amiből $\lambda = \frac{-\ln\frac{2}{3}}{2000}$.
   Legyen annak a valószínűsége p, hogy egy adott égő világit 200 óra után. Ekkor $p = \mathbb{P}(X > 200) = 1 - \mathbb{P}(X < 200) = 1 - F(200) = 1 - \left(1 - e^{-200\lambda}\right)$.
   Így annak a valószínűsége, hogy a 200-ból 150 égő vilgít, az binomiális eloszlású, így

$$\mathbb{P}(150 \quad \text{\textit{égő világít}}) = \binom{200}{150} p^{150}(1-p)^{50}.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy az
   $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$,
   $\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$,
   eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

   Megoldás: Az első esetben, használva a feltételes valószínűség definícióját

$$\mathbb{P}(X > a+b|X > a) = \frac{1 - \mathbb{P}(X < a+b)}{1 - \mathbb{P}(X < a)} = \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} = \frac{e^{-(a+b)^2}}{e^{-a^2}} = e^{-b^2 - 2ab} < e^{-b^2} = \mathbb{P}(X > b),$$

   így a definíció szerint öregedő.
   a második esetben hasonló számolással a következőt kapjuk

$$\mathbb{P}(Y > a+b|Y > a) = \frac{1 - \mathbb{P}(Y < a+b)}{1 - \mathbb{P}(Y < a)} = \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} = \frac{e^{-\sqrt{a+b}}}{e^{-\sqrt{a}}} > e^{-\sqrt{b}} = \mathbb{P}(X > b),$$

   mivel keresztbe szorozva és kihasználva az e^x függvény szigorú montoton növekdését, ez ekvivalens a $-\sqrt{a+b} > -\sqrt{a} - \sqrt{b}$ kifejezéssel, ami négyzetreemeléssel könnyen elenőrizhető. Így a definíció szerint ez az eloszlás öregedő.