Hetedik A4 gyakorlat
rövid megoldási útmutató

2013. november 25.

1. Eloszlás paraméterei

1. Számítsa ki a Poisson-eloszlás, a geometriai eloszlás, a standard és általános normális eloszlás szórását!

   Legyen X Poisson eloszlású λ paraméterrel. Ekkor $\mathbb{E}(X) = \lambda$ így:
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i - \lambda^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda}(\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}) - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda}(\lambda \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}) - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda}(\lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}) - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}) - \lambda^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda \Longrightarrow \mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda}$

   Legyen X pl. optimista geometriai eliszlású p paraméterrel (vegyük észre, hogy a kétfajta geometriainak ugyanaz a szórása). Ekkor $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, így:
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i - \frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p(1-p)^{i-1} - \frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)p(1-p)^{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} - \frac{1}{p^2} = p\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)i(1-p)^{i-2} - p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} - \frac{1}{p^2} = p(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)''|_{x=(1-p)} - p(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)'|_{x=(1-p)} - \frac{1}{p^2} = p\frac{2}{(1-(1-p))^3} - p\frac{1}{(1-(1-p))^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \Longrightarrow \mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

   Legyen X standard normális eloszlású, vagyis sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Megmutatjuk, hogy ekkor várható értéke tényleg 0, és szórása tényleg 1. Ehhez először vegyük észre, hogy $f(x)$ egy páros függvény, emiatt $xf(x)$ páratlan, így $\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0$. Hasonlóan, mivel $x^2 f(x)$ páros, így
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 0^2 = 2\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx = 2\int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$
   $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (-x)(e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\{[-xe^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}\} =$
   $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\{(0-0) + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$
   Ha pedig $Y = \sigma X + \mu$, akkor $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma\mathbb{E}(X) + \mu = \mu$ és $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\sigma X + \mu) = \mathbb{D}^2(\sigma X) = \sigma^2 \mathbb{D}^2(X) = \sigma^2$.

2. Számítsa ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke? (A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)

   Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, így
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = [x^2 \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = (0-0) + 2\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$
   $\Longrightarrow \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda}$

A várható értéktől való abszolót eltérés:
$\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-E(X)|f(x)dx =$ (mivel a várható értéktől vett eltérést nézzük) $= 2\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)}(\mathbb{E}(X)-x)f(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(\frac{1}{\lambda}-x)\lambda e^{-\lambda x}dx = 2\{[(\frac{1}{\lambda}-x)\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x}dx = 2\{(0-(-\frac{1}{\lambda})) - [\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}]_0^{\frac{1}{\lambda}}\}\} = 2\{\frac{1}{\lambda} - (-\frac{1}{e\lambda}+\frac{1}{\lambda})\} = \frac{2}{e\lambda}$

A p-kvantilishez az $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = p$ egyenletet kell megoldani, vagyis a p-kvantilis $x = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-p}$. Így a medián ($p = \frac{1}{2}$) $\frac{\ln 2}{\lambda}$, az alsó kvartilis ($p = \frac{1}{4}$) $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{4}{3}$ és a felső kvartilis ($p = \frac{3}{4}$) pedig $\frac{\ln 4}{\lambda}$.

3. Számítsa ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! (Az utóbbi az $\mathbb{E}|\mathbb{X} - \text{medián}|$ várható értéket jelenti.)

   X várható értéke $\frac{a+b}{2}$, így
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{a+b}{2}^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx - \frac{a+b}{2}^2 = \frac{1}{b-a}[\frac{x^3}{3}]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \Longrightarrow \mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

   Mivel jelen esetben a medián épp a várható érték, ezért az átlagos abszolút eltérés
   $\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-E(X)|f(x)dx =$ (mivel a várható értéktől vett eltérést nézzük) $= 2\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)}(\mathbb{E}(X)-x)f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}}(\frac{a+b}{2}-x)\frac{1}{b-a}dx = \frac{2}{b-a}[-\frac{(\frac{a+b}{2}-x)^2}{2}]_a^{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{b-a}(0+\frac{(b-a)^2}{8}) = \frac{b-a}{4}$

4. Számítsa ki az $f(x) = 2x \quad$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

   $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = [\frac{2}{3}x^3] = \frac{2}{3}$
   $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int_0^1 2x^3dx = [\frac{2}{4}x^4] = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18} \Longrightarrow \mathbb{D}(X) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

   Könnyen látható, hogy az eloszlásfüggvény $F(x) = x^2$ ha $0 < x < 1$, így a medián az $x^2 = \frac{1}{2}$ egyenlet pozitív megoldása, vagyis $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Így az abszolút átlagos eltérés:
   $\mathbb{E}(|X - med(X)|) = \int_0^1 |x - \frac{1}{\sqrt{2}}|2xdx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)2xdx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(x - \frac{1}{\sqrt{2}})2xdx = [\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{3}x^3]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + [\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = (\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - 0) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$
   A későbbiekben még szükségünk lesz rá, úgyhogy számoljuk ki a várható értéktől vett abszolút eltérést is: $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E(X)|f(x)dx == 2\int_{-\infty}^{\mathbb{E}(X)}(\mathbb{E}(X) - x)f(x)dx = 2\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} - x)2xdx = 2[\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}((\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3 - 0) = (\frac{2}{3})^4$

5. Mennyi az előző három feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$
   c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$

   Mivel mindhárom esetben folytonos eloszlásokról van szó, így:

   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma) = F(m + \sigma) - F(m - \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d) = F(m + d) - F(m - d)$
   c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = F(m + 2\sigma) - F(m - 2\sigma)$

d) $\mathbb{P}(m-2d<X<m+2d)=F(m+2d)-F(m-2d)$

Mivel a várható érték körüli intervallumokat viszgálunk, így d-nek mindenütt inkább a várható értéktől vett átlagos abszolút eltérést válasszuk.

Exponenciális eloszlás esetén $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ ha $x>0$, ebbe kell behelyettesíteni az $m=\frac{1}{\lambda}$, $\sigma=\frac{1}{\lambda}$, $d=\frac{2}{e\lambda}$ értékeket.

Egyenletes eloszlás esetén $F(x)=\frac{x-a}{b-a}$ ha $a<x<b$ (a előtt 0, b után 1), ebbe kell behelyettesíteni az $m=\frac{a+b}{2}$, $\sigma=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$, $d=\frac{b-a}{4}$ értékeket.

A 4. feladatban szereplő eloszlás esetén $F(x)=x^2$ ha $0<x<1$ (0 előtt 0, 1 után 1), ebbe kell behelyettesíteni az $m=\frac{2}{3}$, $\sigma=\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $d=(\frac{2}{3})^4$ értékeket.

6. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

   n-oldalú kockára csináljuk először. Nyilván minden értéket $\frac{1}{n}$ valószínűseéggel dobunk és $\mathbb{E}(x)=\frac{n+1}{2}$, így:
   $\mathbb{D}^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X)^2)=\sum_{i=1}^{n} i^2\frac{1}{n}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{n+1}{2}(\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2})=\frac{n+1}{2}\frac{n-1}{6}=\frac{n^2-1}{12}\Longrightarrow\mathbb{D}(X)=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

7. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

   X hipergeometriai elszlású, lehetséges értékei $0,1,2,3$, melyek valószínűségei rendre $p_0=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{6}{30}$, $p_1=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{15}{30}$, $p_2=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{9}{30}$, $p_3=\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{30}$. Ennek megfelelően:
   $\mathbb{E}(X)=0\frac{6}{30}+1\frac{15}{30}+2\frac{9}{30}+3\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$
   $\mathbb{E}(X^2)=0^2\frac{6}{30}+1^2\frac{15}{30}+2^2\frac{9}{30}+3^2\frac{1}{30}=2$
   $\mathbb{D}^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=2-(\frac{6}{5})^2=\frac{14}{25}\Longrightarrow\mathbb{D}(X)=\frac{\sqrt{14}}{5}$

   (Általánosan n, A, B paraméterű hipergeometriai eloszlás várható értéke $\frac{nA}{A+B}$, szórása pedig $\sqrt{\frac{nAB(A+B-n)}{(A+B)^2(A+B-1)}}$.)

8. Legyenek az $X_i(i=1\dots4)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak, azaz értékük p valószínűséggel 1 és $(1-p)$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j=\sum_{i=1}^{j}X_i(j=1\dots4)$! Mennyi $Y_j(j=1\dots4)$ szórása, illetve második momentuma $p=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

   Vegyük észre, hogy Y_j binomiális eloszlású j,p paraméterekkel. Ennek megfelelően pl. $j=2$-re:
   $p_0=\frac{2}{0}(1-p)^2=(1-p)^2$, $p_1=\frac{2}{1}p(1-p)=2p(1-p)$, $p_0=\frac{2}{2}p^2=p^2$
   $\mathbb{E}(Y_2)=0(1-p)^2+1\cdot2p(1-p)+2p^2=2p$
   $\mathbb{E}(Y_2^2)=0^2(1-p)^2+1^22p(1-p)+2^2p^2=2p(1+3p)$
   $\mathbb{D}^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=2p(1+p)-(2p)^2=2p(1-p)\Longrightarrow\mathbb{D}(X)=\sqrt{2p(1-p)}$

   (Általánosan n,p paraméterű binomiális eloszlás várható értéke np, szórása pedig $\sqrt{np(1-p)}$.)

9. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

Ismerősünk érkezése legyen 7 óra X perc, ahol X egyenletes eloszlású. Az, hogy 7-re volt megbeszélve találkozó, jelentse azt, hogy X várható értéke 0, vagyis X egy $[-a, a]$ intervallumon egyenletes. Ennek szórása $\frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, ami jelenleg 5. Ebből kapjuk, hogy $a = 5\sqrt{3}$, vagyis 7 óra $5\sqrt{3}$ perc az az időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik.

2. Normális eloszlások

10. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek? (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)dx$ (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)dx$

    (d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi(x)dx$

    (a) *Az integrál értéke* 1*, hisz* $\varphi(x)$ *sűrűségfüggvény.*
    (b) *Az integrál értéke* 0*, hisz ez épp a standard normális eloszlás várható értéke.*
    (c) *Ez a standard normális eloszlás abszolút értékének várható értéke.*
    $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}[-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
    (d) *Ez a standard nomrális eloszlás négyzetének várható értéke, ami megegyezik a szórásnégyzet és a várható érték négyzetének összegével, így ez* 1*,*

11. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

    (a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$
    (b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$
    (c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$

    (a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$
    (b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$
    (c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1$

    Φ *értékei minden esetben* $NORM.ELOSZL(*; 0; 1; 1)$ *Excel függvénnyel számolhatóak.*

12. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

    Ezek az értékek az eloszlás megfelelő kvantilis értékei, így a $\Phi(x) = p$ *egyenletet kell megoldani, amiből* $x = INVERZ.NORM(p; 0; 1)$

13. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:

    a) $\mathbf{P}(X > 225)$
    b) $\mathbf{P}(215 < X < 229)$
    c) $\mathbf{P}(215 < X < 229 | X > 225)$
    d) $\mathbf{P}(X > 225 | 215 < X < 229)$

    Mindegyik esetben standardizálunk. Ha $X \sim N(220, 10)$*, akkor* $Y = \frac{X-220}{10} \sim N(0, 1)$

    a) $\mathbf{P}(X > 225) = 1 - \mathbf{P}(X < 225) = 1 - \mathbf{P}(\frac{X-220}{10} < \frac{225-220}{10}) = 1 - \mathbf{P}(Y < 0,5) = 1 - \Phi(0,5)$
    b) $\mathbf{P}(215 < X < 229) = \mathbf{P}(\frac{215-220}{10} < \frac{X-220}{10} < \frac{229-220}{10}) = \mathbf{P}(-0,5 < Y < 0,9) = \Phi(0,9) - \Phi(-0,5)$

c) $\mathbf{P}(215 < X < 229 | X > 225) = \frac{\mathbf{P}(225<X<229)}{\mathbf{P}(X>225)} = \frac{\mathbf{P}(\frac{225-220}{10}<\frac{X-220}{10}<\frac{229-220}{10}}{1-\Phi(0,5)} = \frac{\mathbf{P}(0,5<Y<0,9)}{1-\Phi(0,5)} = \frac{\Phi(0,9)-\Phi(0,5)}{1-\Phi(0,5)}$

d) $\mathbf{P}(X > 225 | 215 < X < 229) = \frac{\mathbf{P}(225<X<229)}{\mathbf{P}(215<X<229)} = \frac{\Phi(0,9)-\Phi(0,5)}{\Phi(0,9)-\Phi(-0,5)}$

Φ értékei minden esetben $NORM.ELOSZL(*;0;1;1)$ Excel függvénnyel számolhatóak, vagy számolhatunk direktben a $NORM.ELOSZL(*;220;10;1)$ függvénnyel, az általános normális eloszlásfüggvényével is.

14. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!

Jelölje X egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát. Ekkor a feladat szerint $X \sim N(178, 9)$, így standardizálva $Y = \frac{X-178}{9} \sim N(0, 1)$. Az egyes kérdések:

$\mathbf{P}(169 < X < 187) = \mathbf{P}(\frac{169-178}{9} < \frac{X-178}{9} < \frac{187-178}{9}) = \mathbf{P}(-1 < Y < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$

$\mathbf{P}(X > 200) = 1 - \mathbf{P}(X < 200) = 1 - \mathbf{P}(\frac{X-178}{9} < \frac{200-178}{9}) = 1 - \mathbf{P}(Y < \frac{22}{9}) = 1 - \Phi(\frac{22}{9})$

$\mathbf{P}(169 < X < 187 | X > 172) = \frac{\mathbf{P}(172<X<187)}{\mathbf{P}(X>172)} = \frac{\mathbf{P}(\frac{172-178}{9}<\frac{X-178}{9}<\frac{187-178}{9}}{1-\mathbf{P}(\frac{X-178}{9}<\frac{172-178}{9})} = \frac{\mathbf{P}(-\frac{2}{3}<Y<1)}{1-\mathbf{P}(Y<-\frac{2}{3})} = \frac{\Phi(1)-\Phi(-\frac{2}{3})}{1-\Phi(-\frac{2}{3})}$

$\mathbf{P}(X > 200 | X > 172) = \frac{\mathbf{P}(X>200)}{\mathbf{P}(X>172)} = \frac{1-\Phi(\frac{22}{9})}{1-\Phi(-\frac{2}{3})}$

A kvantiliseket számolhatjuk direktben az általános normális eloszlás $INVERZ.NORM(*;178;9)$ függvényével, vagy visszatranszformálhatjuk a standard nomrális eloszlás kvantiliseit:

$\mathbf{P}(X < x) = p \Longleftrightarrow \mathbf{P}(Y < \frac{x-178}{9}) = p \Longrightarrow \frac{x-178}{9} = INVERZ.NORM(p;0;1) \Longrightarrow x = 9 \cdot INVERZ.NORM(p;0;1) + 178$

Φ értékei minden esetben $NORM.ELOSZL(*;0;1;1)$ Excel függvénnyel számolhatóak, vagy számolhatunk direktben a $NORM.ELOSZL(*;178;9;1)$ függvénnyel, az általános normális eloszlásfüggvényével is.

15. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk excelben imserősünk megérkezési idejét!

A 9. feladat alapján és annak jelöléseivel dolgozunk. Most $X \sim N(0, 5)$. Ekkor X $0,9$-kvantilise $INVERZ.NOMR(0,9;0;5) \approx 6,4$, így 7 óra 6 perc és 24 másodperc az az időpont, amikor ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik.

16. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

   a) 50 fő alatt

   b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

Legyen X az utaslétszám egy metrókocsiban. Ekkor $X \sim N(80, 20)$, ekkor $Y = \frac{X-80}{20} \sim N(0, 1)$.

(a)$\mathbf{P}(X < 50) = \mathbf{P}(\frac{X-80}{20} < \frac{50-80}{20}) = \mathbf{P}(Y < -1,5) = Phi(-1,5)$

(b)$\mathbf{P}(80 < X < 100) = \mathbf{P}(\frac{80-80}{20} < \frac{X-80}{20} < \frac{100-80}{20}) = \mathbf{P}(0 < Y < 1) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$

Φ értékei minden esetben $NORM.ELOSZL(*;0;1;1)$ Excel függvénnyel számolhatóak, vagy számolhatunk direktben a $NORM.ELOSZL(*;80;20;1)$ függvénnyel, az általános normális eloszlásfüggvényével is.

17. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

    Ha X standard normális eloszlású, akkor $\mathbf{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) \approx 0,3085$. Ha X egyenletes eloszlású valamilyen $[a, b]$ intervallumon, akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} = 0$ és $\mathbb{D}^2(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 1$. Ezekből $b = -a = \sqrt{3}$, így $\mathbf{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} \approx 0,35566$.

18. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!

    Legyen X egy véletlenszerűen választott gyertya működési ideje, ekkor $X \sim N(1170, 100)$. A feladat épp ennek az eloszlásnak a $0,05$-kvantilisét keresi. Ennek megfelelően a 14. feladat mintájára:
    $x = 100 \cdot INVERZ.NORM(0,05; 0; 1) + 1170$
    vagy
    $x = INVERZ.NORM(0,05; 1170; 100)$.