Matematika A4
VIII. gyakorlat

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0.6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0.5 valószínűséggel eladom az antikváriumban. Adjuk meg az eladott könyvek számának eloszlását!

3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható értéke?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
   e) Független-e X és Y?

2. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y)dxdy$$

Az X marginális sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

Az Y marginális sűrűségfüggvénye

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Feladatok:

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

   b)
   $$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

   c)
   $$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

   d)
   $$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény legyen:
   $$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

6. Vegyük az $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $(x, y > 0)$ sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:
   a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
   b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
   c) $0 < X < 1$
   d) $3 < Y < 5$

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ és $B = \left\{Y < \frac{1}{2}\right\}$.
   a) Határozzuk meg (X, Y) eloszlásfüggvényét, majd annak segítségével a sűrűségfüggvényét!
   b) Az együttes sűrűségfüggvényből határozzuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényeit!
   c) P(A)=?
   d) P(B)=?

e) P(A és B)=?

f) P(A|B)=?

g) P(B|A)=?

8. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) $P(Y < \frac{1}{4}) =$?

   c) $P(Y < y) =$?

3. Kétdimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}t(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x,y)\, f(x,y)dxdy.$$

Feladatok:

9. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:
   Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi a $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

4. Feltételes eloszlás

A $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

10. Legyen X a $[0,1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke?

11. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

    a) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
    b) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
    c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
    d) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
    e) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
    f) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$

12. Legyen X a Duna mai bécsi vízállása, Y pedig legyen a holnaputáni budapesti vízállás. Statisztikai megfigyelések alapján (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{6}{5}\left(x + (y-1)^2\right)$ ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként 0. A mért bécsi vízállás ismeretében adjuk meg annak a valószínűségét, hogy holnapután Budapesten alacsony vagyis $\frac{1}{2}$-nél kisebb vízállás lesz! (Az adatok nem valósak, továbbá feltesszük, hogy a vízállást egy 0 és 1 közötti szám jellemzi)

13. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

    a) $P(X + Y < 3) = ?$
    b) $P(X + Y < z) = ?$
    c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
    d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

5. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x,y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(y|x) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x|y) = f_1(x) \quad .$$

14. Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

    a) $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
    b) $f(x,y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
    c) $f(x,y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
    d) $f(x,y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

15. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

    $$f(x,y) = 24xy \text{ , ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

    a) Független-e X és Y?
    b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

16. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

    $$f(x,y) = 1 \text{ , ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

    a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$
    b) Független-e X és Y?