

Nyolcadik A4 gyakorlat

rövid megoldási útmutató

2013. november 27.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmevel, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmeikkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

Legyen a kockával dobott érték X , a fejek száma az érmedobások során pedig Y . Ha tudjuk, hogy $X = k$, akkor Y binomiális eloszlású lesz k és $\frac{1}{2}$ paraméterekkel. Ennek megfelelően:

$$\mathbf{P}(X = 4, Y = 2) = \mathbf{P}(Y = 2|X = 4)\mathbf{P}(X = 4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{6} = \frac{1}{16}$$

A feladat másik részéhez egy teljes valószínűség tételét használunk, ahol a teljes eseményrendszert a kockadobás értéke adja:

$$\mathbf{P}(Y = 5) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(Y = 5|X = i)\mathbf{P}(X = i) = (\text{hisz a többi } 0) = \mathbf{P}(Y = 5|X = 5)\mathbf{P}(X = 5) + \mathbf{P}(Y = 5|X = 6)\mathbf{P}(X = 6) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{6} + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0.6 valószínűséggel leveszem a polcra. A levett könyveket még átszelektálok, és mindegyiket 0.5 valószínűséggel eladom az antikváriumban. Adjuk meg az eladott könyvek számának eloszlását!

Legyen a levett könyvek száma X , az eladottaké pedig Y . X eloszlása binomiális 20 és 0,6 paraméterekkel. Y lehetséges értékei $0, 1, \dots, 20$. Ha tudjuk, hogy $X = i$, akkor Y binomiális eloszlású lesz i és 0,5 paraméterekkel.

$\mathbf{P}(Y = l)$ meghatározásához egy teljes valószínűség tételét használunk, ahol a teljes eseményrendszert a levett könyvek száma adja:

$$\mathbf{P}(Y = l) = \sum_{i=0}^{20} \mathbf{P}(Y = l|X = i)\mathbf{P}(X = i) = (\text{hisz a többi } 0) = \sum_{i=l}^{20} \mathbf{P}(Y = l|X = i)\mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=l}^{20} \binom{20}{i}(0,6)^i(0,4)^{20-i}\binom{i}{l}(0,5)^l$$

3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

- a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
- b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
- c) X^2Y várható értéke?
- d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
- e) Független-e X és Y ?

a) Kiolvastva a táblázatból - $\mathbf{P}(X = 2, Y = 1) = 0,1$

b) A megfelelő sorösszegekből (igazából az X értéke szerint bontjuk 3 diszjunkt eseményre) - $\mathbf{P}(Y = 3) = 0,1 + 0 + 0,1 = 0,2$

c) X^2Y értékei

$X \setminus Y$	1	2	3
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27

Ezeket az értékeket a megfelelő valószínűségekkel összeszorozva:

$$\mathbf{E}(X^2Y) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0 + 9 \cdot 0,1 + 18 \cdot 0 + 27 \cdot 0,1 = 6,7$$

d) Ehhez az $Y = 3$ értékhez tartozó oszlopot kell újrnormálni az oszlopösszegeggel (hogy 1 legyen az összeg), vagyis $\mathbf{P}(Y = 3)$ -mal. Ennek megfelelően az eloszlásban a valószínűségek rendre $\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

e) X és Y nem független, ugyanis pl. $0 = \mathbf{P}(X = 2, Y = 3) \neq \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 3) \neq 0$.

2. Sűrűségfüggvény a síkon

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

a) $f(x, y)$ nem-negatív, és $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{4}{5}(x + xy + y) dx dy = \frac{4}{5} \int_0^1 [\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} + yx]_0^1 dy = \frac{4}{5} \int_0^1 (\frac{1}{2} + \frac{y}{2} + y) dy = \frac{4}{5} \int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{3y}{2} dy = \frac{4}{5} (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) = 1$, tehát ez egy sűrűségfüggvény.

b) Ez pont két független λ paraméterű exponenciális eloszlás együttes sűrűségfüggvénye, tehát az.

c) $f(0, 0) = -10 < 0$, tehát nem az.

d) $f(x, y)$ nyilván nem-negatív, és $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \frac{1}{x} dy dx = \int_{x=0}^1 \frac{x}{x} dx = \int_{x=0}^1 1 dx = 1$ tehát ez is sűrűségfüggvény.

5. Határozzuk meg c -t úgy, hogy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

$f(x, y)$ pontosan akkor nem-negatív, ha c nem-negatív. A másik feltétel, hogy integrálja 1, azaz $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy =$

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} c \cdot y \, dx dy = c \int_{y=0}^1 y(1-y) \, dy = \frac{c}{6}, \text{ amiből } c = 6 \text{ adódik.}$$

6. Vegyük az $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ ($x, y > 0$) sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

- $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
- $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
- $0 < X < 1$
- $3 < Y < 5$

$$a) \mathbf{P}(0 < X < 1, 0 < Y < 1) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y} dy = (1 - e^{-\lambda})^2$$

$$b) \mathbf{P}(1 < X < 5, 2 < Y < 8) = \int_1^5 \int_2^8 f(x, y) dy dx = \int_1^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_2^8 \lambda e^{-\lambda y} dy = (e^{-\lambda} - e^{-5\lambda})(e^{-2\lambda} - e^{-8\lambda})$$

c) X marginális eloszlása könnyen látható, hogy $\text{Exp}(\lambda)$, hisz $f(x, y)$ két ilyen eloszlás sűrűségfüggvényének a szorzata, így $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, tehát $\mathbf{P}(0 < X < 1) = F_1(1) - F_1(0) = 1 - e^{-\lambda}$.

d) Hasonlóan az előzőhöz $F_2(x) = 1 - e^{-\lambda y}$, tehát $\mathbf{P}(3 < Y < 5) = F_2(5) - F_2(3) = e^{-3\lambda} - e^{-5\lambda}$.

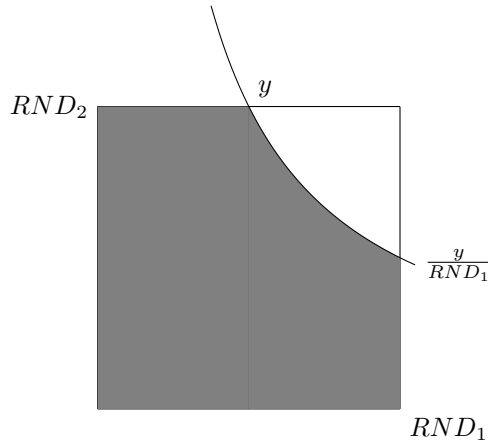
7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

- Határozzuk meg (X, Y) eloszlásfüggvényét, majd annak segítségével a sűrűségfüggvényét!
- Az együttes sűrűségfüggvényből határozzuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényeit!
- $\mathbf{P}(A)=?$
- $\mathbf{P}(B)=?$
- $\mathbf{P}(A \text{ és } B)=?$
- $\mathbf{P}(A|B)=?$
- $\mathbf{P}(B|A)=?$

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y)$$

- Ha $x \leq 0$ vagy $y \leq 0$, akkor nyilván $F(x, y) = 0$.
- Ha $x, y \geq 1$, akkor $F(x, y) = 1$.
- Ha $0 < x < 1$ és $y > 1$, akkor $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(X < x) = x$, hisz $X = RND_1$.
- Vegyük észre, hogy $Y \leq X$ mindig teljesül, így ha $0 < x < y < 1$, akkor $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(X < x) = x$.

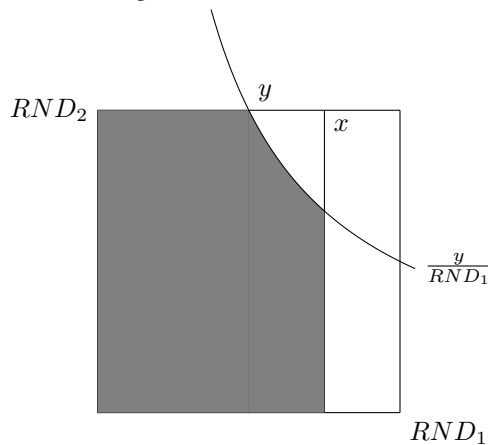
- Ha $x > 1$ és $0 < y < 1$, akkor $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(RND_1 \cdot RND_2 < y)$. Ezt a valószínűséget geometriai úton tudjuk számolni, mégpedig úgy, hogy ábrázoljuk azon (RND_1, RND_2) pontokat az egységnyezetben, amelyekre $RND_1 \cdot RND_2 < y$. Ezt a tartományt felülről először az $RND_2 = 1$, majd az $RND_2 = \frac{y}{RND_1}$ függvény határolja, mely az $RND_2 = 1$ -et y -ban metszi.



Területe integrálszámítással adódik:

$$\int_0^y 1 dt + \int_y^1 \frac{y}{t} dt = y + y[\ln t]_y^1 = y + y \ln \frac{1}{y}, \text{ vagyis } x > 1 \text{ és } 0 < y < 1 \text{ esetén } F(X, Y) = y + y \ln \frac{1}{y}$$

- Hasonlóan kell eljárni a $0 < y < x < 1$ esetben is. $F(X, Y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y) = \mathbf{P}(RND_1 < x, RND_1 \cdot RND_2 < y)$. Akárcsak előbb, most is geometriai úton számolhatunk, a kapcsolódó ábra az előzőnek megfelelően:



Ennek területe most:

$$\int_0^y 1 dt + \int_y^x \frac{y}{t} dt = y + y[\ln t]_y^x = y + y \ln \frac{x}{y}, \text{ vagyis } 0 < y < x < 1 \text{ esetén } F(X, Y) = y + y \ln \frac{x}{y}$$

Az eloszlásfüggvényből parciális deriválásokkal adódik a sűrűségfüggvény. Minden esetben mi választhatjuk meg a deriválások sorrendjét, vagyis, hogy előbb x vagy y szerint deriválunk, ez megkönnyítheti a dolgunkat. A deriválásokat elvégezve azt kapjuk $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0.

$X = RND_1$, így az ő peremsűrűségfüggvénye $f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$, egyébként 0. Y peremsűrűségfüggvénye az együttes sűrűségfüggvényből határozható meg integrálással, mégpedig $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx =$

$$\int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y, \text{ ha } 0 < y < 1.$$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \text{ hisz } X = RND_1$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln y dy = [y - y \ln y]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1+\ln 2}{2}, \text{ hisz } -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$$P(A \cap B) = \mathbf{P}(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dy dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln 2}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\ln 2}{1+\ln 2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \ln 2$$

8. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

b) $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$

c) $P(Y < y) = ?$

Az $f(x, y) = f_{2|1}(y|x)f_1(x)$ összefüggést használjuk. $0 \leq X \leq 1$, így $0 < x \leq 1$ -re

$$F_1(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\sqrt{RND_1} < x) = \mathbf{P}(RND_1 < x^2) = x^2 \implies f_1(x) = (x^2)' = 2x \text{ ha } 0 < x < 1 \text{ egyébként } 0.$$

$Y = X \cdot RND_2$, így az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású lesz $[0, x]$ -en, tehát $f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x$ egyébként 0. Összegezve azt kapjuk, hogy $f(x, y) = 2x \frac{1}{x} = 2$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0.

Y marginális sűrűségfüggvénye $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 2 dy = 2(1 - y)$ ha $0 < y < 1$, egyébként 0, így

$$\mathbf{P}(Y < y) = \int_{-\infty}^y f_2(t) dt = \int_0^y 2(1 - t) dt = [-(1 - t)^2]_0^y = 1 - (1 - y)^2 = 2y - y^2, \text{ ha } 0 < y < 1 \text{ (nyilván } 0 \text{ az értéke, ha } y \leq 0 \text{ és } 1, \text{ ha } y \geq 1). \text{ } y = \frac{1}{4}\text{-re az érték } \frac{7}{16}.$$

3. Kétdimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

9. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:

Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

b) Legyen $t(x, y) = xy$. Mennyi a $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

c) Legyen $t(x, y) = xy^2$. Mennyi a $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

X ugyanaz, mint az előző feladatban, így $f_1(x) = (x^2)' = 2x$ ha $0 < x < 1$ egyébként 0. $Y = X \cdot \sqrt{RND_2}$, így $0 < y < x$ -re $F_{2|1}(y|x) = \mathbf{P}(Y < y|X = x) = \mathbf{P}(x \cdot \sqrt{RND_2} < y) = \mathbf{P}(RND_2 < (\frac{y}{x})^2) = (\frac{y}{x})^2$, tehát $f_{2|1}(y|x) = \frac{\partial}{\partial y} (\frac{y}{x})^2 = \frac{2y}{x^2}$. Összegezve $f(x, y) = 2x \frac{2y}{x^2} = \frac{4y}{x}$, ha $0 < x < y < 1$, egyébként 0.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x xy \frac{4y}{x} dy dx = \int_0^1 \int_0^x 4y^2 dy dx = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{1}{3}$$

$$E(XY^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x xy^2 4 \frac{y}{x} dy dx = \int_0^1 \int_0^x 4y^3 dy dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

4. Feltételes eloszlás

10. Legyen X a $[0, 1]$ -en egyenletes, Y pedig az $[X, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke?

$f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$, egyébként 0, hisz egyenletes $[0, 1]$ -en. $f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{1-x}$, egyébként 0 hisz az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású $[x, 1]$ -en. Így $f(x, y) = f_1(x)f_{2|1}(y|x) = 1 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, ha $0 < x < y < 1$, egyébként 0. X várható értéke nyilván $\frac{1}{2}$.

11. Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

- $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
- $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
- $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
- $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
- $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
- $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$

A feltételes sűrűségfüggvények:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1 \implies f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y \implies f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = -\frac{1}{x \ln y}$$

$$P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = \int_{0.3}^{0.4} f_{2|1}(y|x) dy = \int_{0.3}^{0.4} \frac{1}{x} dy = \frac{1}{10x}$$

Konkrét x értékek esetén csak be kell helyettesíteni.

$$P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = \int_{0.5}^{0.7} f_{1|2}(x|y) dx = \int_{0.5}^{0.7} -\frac{1}{x \ln y} dx = -\frac{1}{\ln y} [\ln x]_{0.5}^{0.7} = -\frac{\ln \frac{7}{5}}{\ln y}$$

Konkrét y értékek esetén csak be kell helyettesíteni.

12. Legyen X a Duna mai bécsi vízállása, Y pedig legyen a holnaputáni budapesti vízállás. Statisztikai megfigyelések alapján (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{6}{5}(x + (y - 1)^2)$ ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként 0. A mért bécsi vízállás ismeretében adjuk meg annak a valószínűségét, hogy holnapután Budapesten alacsony vagyis $\frac{1}{2}$ -nél kisebb vízállás lesz! (Az adatok nem valósak, továbbá feltesszük, hogy a vízállást egy 0 és 1 közötti szám jellemzi)

$X = x$ feltétel mellett Y sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + (y - 1)^2) dy = \frac{6}{5}[xy + \frac{(y-1)^3}{3}]_0^1 = \frac{6}{5}(x + \frac{1}{3}) \implies f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{x + (y-1)^2}{x + \frac{1}{3}}$$

$$P(Y < \frac{1}{2} | X = x) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{2|1}(y|x) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x + (y-1)^2}{x + \frac{1}{3}} dy = \frac{1}{x + \frac{1}{3}} [xy + \frac{(y-1)^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{7}{24}}{x + \frac{1}{3}}$$

13. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

- $P(X + Y < 3) = ?$
- $P(X + Y < z) = ?$
- $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
- $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

$f_1(x) = 2e^{-2x}$, ha $x > 0$ és $f_2(y) = 2e^{-2y}$, ha $y > 0$, hisze exponenciális eloszlásúak, és a függetlenség miatt $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$, ha $x, y > 0$.

$$\mathbf{P}(X + Y < z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy dx = \int_0^z \int_0^{z-x} 4e^{-2(x+y)} dy dx = \int_0^z 4e^{-2x} \left[\frac{e^{-2y}}{-2} \right]_0^{z-x} dx = \int_0^z 2(e^{-2x} - e^{-2z}) dx = [-e^{-2x} - 2e^{-2z}x]_0^z = 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z} = 1 - (2z + 1)e^{-2z}$$

$z = 3$ -ra csak ebbe kell behelyettesíteni.

$$\mathbf{P}(X + Y < 3 | X < 2) = \frac{\mathbf{P}(X+Y < 3, X < 2)}{\mathbf{P}(X < 2)}$$

$$\mathbf{P}(X+Y < 3, X < 2) = \int_{-\infty}^2 \int_{-\infty}^{3-x} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_0^{3-x} 4e^{-2(x+y)} dy dx = \int_0^2 4e^{-2x} \left[\frac{e^{-2y}}{-2} \right]_0^{3-x} dx = \int_0^2 2(e^{-2x} - e^{-6}) dx = [-e^{-2x} - 2e^{-6}x]_0^2 = 1 - e^{-4} - 4e^{-6} \implies \mathbf{P}(X + Y < 3 | X < 2) = \frac{1 - e^{-4} - 4e^{-6}}{1 - e^{-4}}$$

$$\mathbf{P}(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = \frac{\mathbf{P}(2 < X+Y < 3, Y > 1)}{\mathbf{P}(Y > 1)}$$

Felrajzolva, hogy hol kell integrálni:

$$\mathbf{P}(2 < X + Y < 3, Y > 1) = \int_0^1 \int_{2-x}^{3-x} 4e^{-2(x+y)} dy dx + \int_1^2 \int_1^{3-x} 4e^{-2(x+y)} dy dx = \int_0^1 4e^{-2x} \left[\frac{e^{-2y}}{-2} \right]_{2-x}^{3-x} dx + \int_1^2 4e^{-2x} \left[\frac{e^{-2y}}{-2} \right]_1^{3-x} dx = \int_0^1 2(e^{-4} - e^{-6}) e^{-2x} dx + \int_1^2 2(e^{-2} e^{-2x} - e^{-6}) dx = (e^{-4} - e^{-6}) [-e^{-2x}]_0^1 + [-e^{-2} e^{-2x} - 2e^{-6}x]_1^2 = 2e^{-4} - 5e^{-6} + e^{-8}$$

(lehet, hogy el van számolva) $\implies \mathbf{P}(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = \frac{2e^{-4} - 5e^{-6} + e^{-8}}{1 - (1 - e^{-2})}$

5. Függetlenség

14. Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

- $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
- $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
- $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
- $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

a) Korábbi feladatokban már számoltuk, hogy $f_1(x) = 1$, ha $0 < x < 1$ és $f_2(y) = -\ln y$, ha $0 < y < 1$. Nyilván $f_1(x)f_2(y) \neq f(x, y)$, így nem függetlenek.

$$\text{b) } f_1(x) = \int_0^x 2 dy = 2x, \text{ ha } 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_y^1 2 dy = 2(1 - y), \text{ ha } 0 < y < 1$$

Nyilván $f_1(x)f_2(y) \neq f(x, y)$, így nem függetlenek.

Az előző két esetben az, hogy nem függetlenek abból is látszott, hogy az együttes sűrűségfüggvény tartója nem "téglalap" alakú volt.

$$\text{c) } f_1(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} dy = 1, \text{ ha } 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}, \text{ ha } 0 < y < 2$$

Nyilván $f_1(x)f_2(y) = f(x, y)$, tehát függetlenek.

d) Ez nem sűrűségfüggvény.

15. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 24xy, \text{ ha } 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y ?

b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

Nem lehetnek függetlenek, mert $f(x, y)$ tartója nem téglalap alakú. (Olyan x és y értékekre, amelyekre $0 < x, y < 1$ de $x + y > 1$, $f(x, y) = 0$, holott ezekre az értékekre sem $f_1(x)$, sem $f_2(y)$ nem 0, így $f_1(x)f_2(y) = f(x, y)$ nem állhat fenn.)

Mivel $u, v > 0$ és $u + v < 1$ ezért egy szép tartományon kell integrálni:

$$P(X < u, Y < v) = \int_0^u \int_0^v 24xy dy dx = 24 \int_0^u x dx \int_0^v y dy = 6x^2 y^2$$

16. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1, \text{ ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$

b) Független-e X és Y ?

A tartó alakjából megint látszik, hogy nem függetlenek.

$P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2})$ most nem más, mint a megfelelő tartomány területe, hiszen az 1 függvényt kellene ezen integrálni. Felrajzolva a feltételt teljesítő (x, y) pontokat a sűrűségfüggvény tartóján, azt kapjuk, hogy ha $x < \frac{1}{4}$, akkor ez a tartomány egy téglalap, melynek területe $\frac{x}{2}$, ha $x > \frac{1}{2}$, akkor ez a tartomány egy trapéz, melynek területe $\frac{3}{16}$ és ha $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, akkor ez a tartomány az előbbi trapéz mínusz egy háromszög, és területe $\frac{3}{16} - \frac{(\frac{1}{2}-x)(1-2x)}{2} = \frac{3}{16} - (\frac{1}{2} - x)^2$