

# Matematika A4

## IX. gyakorlat megoldás

### 1. Várható érték és szórás tulajdonságai

1. Számítsd ki a binomiális eloszlás szórását!

*Megoldás: A sok lehetséges módszer közül itt egy több esetben is alkalmazhatóval számolunk. Először is meg kell határoznunk a*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p^i (1-p)^{n-i}$$

*összeget. Ennek céljából  $i \cdot t \frac{d}{dt} t^i \Big|_{t=1}$  alakba írjuk, hisz  $\frac{d}{dt} t^i = i t^{i-1}$ , tehát  $t = 1$  helyettesítéssel  $i \cdot t$  kapunk. Felhasználva a derivált linearitását és a binomiális tételt,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d}{dt} t^i \Big|_{t=1} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i p^i (1-p)^{n-i} \right) \Big|_{t=1} = \\ &= \frac{d}{dt} (tp + 1 - p)^n \Big|_{t=1} = n(tp + 1 - p)^{n-1} \cdot p \Big|_{t=1} = np. \end{aligned}$$

*A szórásnégyzet meghatározásához szükségünk van a második momentumra is. A fent leírt trükköt, most az  $i(i-1) = \frac{d^2}{dt^2} t^i \Big|_{t=1}$  formában tudjuk alkalmazni. Így*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1) \cdot p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^2}{dt^2} t^i \Big|_{t=1} p^i (1-p)^{n-i} = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i p^i (1-p)^{n-i} \right) \Big|_{t=1} = \frac{d^2}{dt^2} (tp + 1 - p)^n \Big|_{t=1} = \\ &= n(n-1)(tp + 1 - p)^{n-2} \cdot p^2 \Big|_{t=1} = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

*Így*

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - [\mathbb{E}(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

$$\text{Azaz } \mathbb{D}(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

2. Ha  $\mathbb{E}(X) = 1$  és  $\mathbb{D}^2(X) = 5$ , határozd meg  $\mathbb{E}[(2+X)^2]$  értékét!

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(2+X)^2] &= \mathbb{E}(4 + 4X + X^2) = \mathbb{E}(4) + \mathbb{E}(4X) + \mathbb{E}(X^2) = \\ &= 4 + 4\mathbb{E}(X) + \mathbb{D}^2(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 = 4 + 4 \cdot 1 + 5 + 1^2 = 14. \end{aligned}$$

*A feladat megoldása során használtuk a várható érték linearitását és egyéb tulajdonságait.*

3. Legyenek  $X$  és  $Y$  független és azonos eloszlású valószínűségi változók  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. Szamold ki az  $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$  értékét.

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2XY) + \mathbb{E}(Y^2) = \\ &= \mathbb{D}^2(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{D}^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 = 2(\sigma^2 + \mu^2) - 2 \cdot \mu^2 = 2\sigma^2. \end{aligned}$$

A megoldás során itt is használtuk a várható érték linearitását, illetve azt, hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával.

4. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson( $\lambda$ ) eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

Megoldás: Jelölje  $Y$  a zsebemben lévő aprópénzem értékét, és  $X_i$  a zsebemben lévő  $i$  forintos érmék számát,  $i = 5, 10, 20, 50, 100$ . A szöveg alapján  $X_i$  Poisson eloszlást követ. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(5X_5 + 10X_{10} + 20X_{20} + 50X_{50} + 100X_{100}) = \\ &= \mathbb{E}(5X_5) + \mathbb{E}(10X_{10}) + \mathbb{E}(20X_{20}) + \mathbb{E}(50X_{50}) + \mathbb{E}(100X_{100}) = \\ &= 5\mathbb{E}(X_5) + 10\mathbb{E}(X_{10}) + 20\mathbb{E}(X_{20}) + 50\mathbb{E}(X_{50}) + 100\mathbb{E}(X_{100}) = \\ &= 5\lambda + 10\lambda + 20\lambda + 50\lambda + 100\lambda = 185\lambda.\end{aligned}$$

Itt ismét a várható érték linearitását használtuk. A szórás kiszámításához először a szórásnégyzetet számoljuk ki.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Y) &= \mathbb{D}^2(5X_5 + 10X_{10} + 20X_{20} + 50X_{50} + 100X_{100}) = \\ &= \mathbb{D}^2(5X_5) + \mathbb{D}^2(10X_{10}) + \mathbb{D}^2(20X_{20}) + \mathbb{D}^2(50X_{50}) + \mathbb{D}^2(100X_{100}) = \\ &= 5^2\mathbb{D}^2(X_5) + 10^2\mathbb{D}^2(X_{10}) + 20^2\mathbb{D}^2(X_{20}) + 50^2\mathbb{D}^2(X_{50}) + 100^2\mathbb{D}^2(X_{100}) = \\ &= 5^2\lambda + 10^2\lambda + 20^2\lambda + 50^2\lambda + 100^2\lambda = 13025\lambda.\end{aligned}$$

Így  $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{13025\lambda}$ . Itt a megoldás során felhasználtuk a szórásnégyzetre vonatkozó tulajdonságot független valószínűségi változók esetén.

5. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város  $(0, 0)$  középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város  $(x, y)$  pontján történik egy baleset, a mentőnek  $|x| + |y|$  távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

Megoldás: A feladat szövege alapján a baleset helye modellezhető egy  $(X, Y)$  párral, melyek együttes eloszlása egyenletes a  $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$  négyzeten, azaz az együttes sűrűségfüggvény itt  $\frac{1}{3^2}$ , egyébként zérus és az is rögtön adódik (mivel téglalapon vagyunk), hogy  $X$  és  $Y$  (a marginálisok) függetlenek egymástól, mindkettő egyenletes eloszlású a  $[-1.5, 1.5]$  intervallumon. Azaz a betegszállítás várható hossza:

$$\mathbb{E}(|X| + |Y|) = \mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|Y| = 2\mathbb{E}|X| = 2 \int_{-1.5}^{1.5} |x| \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3} 1.5 \times 1.5 = \frac{3}{2} = 1.5,$$

utóbbi levezetésben rendre a következőket használtuk: a várható érték lineáris (összeg várható értéke a várható értékek összege),  $X$  és  $Y$  azonos eloszlású (a függetlenség itt nem kell, az ahhoz kellett, hogy  $X$  és  $Y$  is egyenletes).

## 2. Kovariancia és korreláció

6.  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 60xy^2 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

Megoldás: A kovarianciához kellene a várható értékek, ezért ezekkel kezdjük:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} x 60xy^2 dy dx = \int_{x=0}^1 60x^2 \int_{y=0}^{1-x} y^2 dy dx = \int_{x=0}^1 60x^2 \frac{(1-x)^3}{3} dx = \\ &= 20 \int_{x=0}^1 (-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2) dx = 20 \left( -\frac{1}{6} + 3\frac{1}{5} - 3\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} y \, 60xy^2 \, dydx = \int_{x=0}^1 60x \int_{y=0}^{1-x} y^3 \, dydx = \int_{x=0}^1 60x \frac{(1-x)^4}{4} \, dx = \\ &= 15 \int_{x=0}^1 (x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x) \, dx = 15 \left( \frac{1}{6} - 4\frac{1}{5} + 6\frac{1}{4} - 4\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} xy \, 60xy^2 \, dydx = \int_{x=0}^1 60x^2 \int_{y=0}^{1-x} y^3 \, dydx = \int_{x=0}^1 60x^2 \frac{(1-x)^4}{4} \, dx = \\ &= 15 \int_{x=0}^1 (x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + x^2) \, dx = 15 \left( \frac{1}{7} - 4\frac{1}{6} + 6\frac{1}{5} - 4\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Azaz  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{42}$ .

7.  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} 2e^{-2x} & , \text{ ha } 0 < x < \infty, 0 \leq y \leq x, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a kovarianciájukat.

*Megoldás: Ismét a várható értékek meghatározásával kezdjük a feladatot:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^x x \frac{2}{x} e^{-2x} \, dydx = \int_{x=0}^{+\infty} 2xe^{-2x} \, dx = \\ &\stackrel{\text{parc. int.}}{=} \left[ -xe^{-2x} \right]_{x=0}^{+\infty} + \int_{x=0}^{+\infty} e^{-2x} \, dx = 0 + \left[ \frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^x y \frac{2}{x} e^{-2x} \, dydx = \int_{x=0}^{+\infty} xe^{-2x} \, dx = \dots = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^x xy \frac{2}{x} e^{-2x} \, dydx = \int_{x=0}^{+\infty} x^2 e^{-2x} \, dx = \\ &\stackrel{\text{parc. int.}}{=} \left[ \frac{-x^2}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{+\infty} + \int_{x=0}^{+\infty} xe^{-2x} \, dx = 0 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ebből a kovariancia  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ .

8.  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y+x/y)} & , \text{ ha } x > 0, y > 0, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg  $\mathbb{E}(X)$  és  $\mathbb{E}(Y)$  értékét, valamint mutassuk meg, hogy  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$ .

*Megoldás: Ismét a várható értékek meghatározásával kezdjük a feladatot:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} x \frac{1}{y} e^{-y-x/y} \, dx dy = \dots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y} y \, dy = \dots = 1.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} y \frac{1}{y} e^{-y-x/y} \, dx dy = \dots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y} y \, dy = \dots = 1.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} xy \frac{1}{y} e^{-y-x/y} \, dx dy = \dots = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y} y^2 \, dy = \dots = 2.$$

Így a kovariancia:  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 2 - 1 \times 1 = 1$ . (Itt az integrálásokat parciális integrálással végeztük.)

9. Legyen  $X$  az a szám, ahányszor 1-est látunk,  $Y$  az a szám, ahányszor 2-est látunk ha  $n$ -szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

*Megoldás: A feladat megoldásának a kulcsa az, hogy az  $X|Y = j$  feltételes eloszlás binomiális  $n - j$ , illetve  $p = \frac{1}{5}$  paraméterrel (ahol  $0 \leq j \leq n$  egy rögzített természetes szám). Ennek a várható értéke tehát:  $n p = \frac{n-j}{5}$ . Illetve a marginálisok is binomiális eloszlásúak  $n$ , illetve  $p = \frac{1}{6}$  paraméterrel. Azaz  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{n}{6}$ ,  $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y) = n \times \frac{1}{6} \frac{5}{6}$  és  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 = n \times \frac{1}{6} \frac{5}{6} + \frac{n^2}{6^2} = \frac{25}{6}$ . Azaz*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{i,j=0}^n ij\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=0}^n j \left[ \sum_{i=0}^{n-j} i\mathbb{P}(X=i|Y=j) \right] \mathbb{P}(Y=j) = \\ &= \sum_{j=0}^n j \frac{n-j}{5} \mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^n j(n-j)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{n}{5}\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{5}\mathbb{E}(Y^2) = \\ &= \frac{n}{5} \times \frac{n}{6} - \frac{1}{5} \frac{5n+n^2}{36} = \frac{1}{36}(n^2 - n), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk az  $XY$  valószínűségi változó várható értékére vonatkozó képletet, a feltételes eloszlás definícióját. Vagyis:

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{36}(n^2 - n) - \frac{n^2}{6^2} = -\frac{n}{36},$$

azaz negatívan korrelált  $X$  és  $Y$ , ami intuitíve világos is, hiszen minél több a 2-es dobások száma, annál kevesebb 1-es dobást látunk nagy valószínűséggel. Azaz a korrelációs együttható:

$$r(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)} = \frac{-\frac{n}{36}}{\frac{5n}{36}} = -\frac{1}{5}.$$

10. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen  $X$  a dobások összege, és  $Y$  az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ -t. Függetlenek-e  $X$  és  $Y$ ?

*Megoldás: Először itt is a várható értékek kiszámolásával kezdjük:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=2}^{12} i\mathbb{P}(X=i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7,$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=-5}^5 i\mathbb{P}(Y=i) = -5 \cdot \frac{1}{36} + (-4) \cdot \frac{2}{36} + (-3) \cdot \frac{3}{36} + \dots + 4 \cdot \frac{2}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} = 0,$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} ij\mathbb{P}(X=i, Y=j) = 0$$

*Ez utóbbi számolásban kihasználtuk azt a szimmetriát, hogy minden tag pozitív és negatív alakban is előfordul az összegben, így végül 0-t kapunk a várható értékre. Így  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$ .*

*Ugyanakkor  $X$  és  $Y$  nem lesznek függetlenek, mert például  $\mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{36}$ ,  $\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{5}{36}$ , míg  $\mathbb{P}(X=3, Y=-1) = \frac{1}{36}$ . Azaz nem teljesül a  $\mathbb{P}(X=3) \cdot \mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X=3, Y=-1)$  azonosság. Tehát ha két változó kovarianciája 0, az még nem jelenti azt, hogy ezek a változók függetlenek.*

11. Ha  $X_1, X_2, X_3, X_4$  páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

- (a)  $X_1 + X_2$  és  $X_2 + X_3$ ;  
 (b)  $X_1 + X_2$  és  $X_3 + X_4$

korrelációs együtthatóját.

*Megoldás: A kovariancia linearitását használjuk mindkét esetben:*

- (a)  $\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \mathbf{Cov}(X_1, X_2) + \mathbf{Cov}(X_1, X_3) + \mathbf{Cov}(X_2, X_2) + \mathbf{Cov}(X_2, X_3) = 0 + 0 + \mathbb{D}^2(X_2) + 0 = 1$ , mivel páronként korrelátlanak voltak az  $X_i$ 'k és 1 volt a szórásuk. Emellett  $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) = 1 + 1 = 2$ ,  $\mathbb{D}^2(X_2 + X_3) = \mathbb{D}^2(X_2) + \mathbb{D}^2(X_3) = 1 + 1 = 2$ . Tehát

$$r(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)}{\mathbb{D}(X_1 + X_2) \cdot \mathbb{D}(X_2 + X_3)} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Hasonlóan az előbbiekhöz, használva a kovariancia linearitását:

$$\mathbf{Cov}(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = \mathbf{Cov}(X_1, X_3) + \mathbf{Cov}(X_1, X_4) + \mathbf{Cov}(X_2, X_3) + \mathbf{Cov}(X_2, X_4) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \text{ Azaz ekkor } r(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = 0.$$

12. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játsszák: az  $A$  játékos dob egy kockával, azután a  $B$  játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen

$$X := \begin{cases} 1 & , \text{ ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & , \text{ egyébként,} \end{cases} \quad Y := \begin{cases} 1 & , \text{ ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy  $X$  és  $Y$  pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

*Megoldás:* A pozitív korreláltsághoz az kell, hogy a változóink kovarianciája pozitív legyen. Ezt fogjuk tehát meghatározni. Ehhez szokás szerint ki kell számolnunk a megfelelő várható értékeket:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \mathbb{P}(A \text{ nyer}) + 0 \cdot \mathbb{P}(A \text{ nem nyer}) = \sum_{i=0}^6 \mathbb{P}(A \text{ nyer} | \text{Bank } i\text{-t dob}) \cdot \mathbb{P}(\text{Bank } i\text{-t dob}) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{36}. \end{aligned}$$

Szimmetriai okok miatt  $\mathbb{E}(Y) = \frac{15}{36}$  is teljesül. Illetve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 1 \cdot \mathbb{P}(A \text{ nyer, és } B \text{ nyer}) + 0 \cdot \mathbb{P}(A \text{ nem nyer vagy } B \text{ nem nyer}) = \\ &= \sum_{i=0}^6 \mathbb{P}(A \text{ nyer, és } B \text{ nyer} | \text{Bank } i\text{-t dob}) \cdot \mathbb{P}(\text{Bank } i\text{-t dob}) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{55}{216}. \end{aligned}$$

A számolások során a Bank által dobott értékre használtuk a Teljes Valószínűség Tételét. Ezek alapján

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{55}{216} - \frac{15}{36} \cdot \frac{15}{36} = \frac{305}{1296}.$$

Ezzel pedig beláttuk, hogy a változók valóban pozitívan korreláltak, ami azt jelenti, hogy feltéve, hogy az egyik játékos nyert, az csak növeli az esélyét annak, hogy a második játékos is nyerni fog.

13. Ha  $Y = aX + b$ , mutassuk meg, hogy

$$r(X, Y) = \begin{cases} +1 & , \text{ ha } a > 0, \\ -1 & , \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

*Megoldás:* Először itt is a  $\mathbf{Cov}(X, Y)$  mennyiséget kell kiszámolnunk. Használva a kovariancia linearitását kapjuk, hogy

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, aX + b) = \mathbf{Cov}(X, aX) + \mathbf{Cov}(X, b) = a\mathbf{Cov}(X, X) + 0 = a\mathbb{D}^2(X).$$

A szórásnégyzet tulajdonságai alapján:  $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(aX + b) = a^2\mathbb{D}^2(X)$ , azaz  $\mathbb{D}(aX + b) = |a|\mathbb{D}(X)$ . Ezek alapján

$$r(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)} = \frac{a\mathbb{D}^2(X)}{\mathbb{D}(X) \cdot |a|\mathbb{D}(X)} = \frac{a}{|a|}.$$

Ezt pedig pontosan azt adja, amit a feladatban be kellett látni.

14. Ha  $Z$  standard normális eloszlású, akkor mennyi  $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$ ?

*Megoldás: A feladat megoldásában felhasználjuk, hogy ismerjük a normális eloszlású valószínűségi változó minden páratlan momentuma 0 (azaz  $\mathbb{E}(X^k) = 0$ , ha  $k$  páratlan). Így*

$$\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = \mathbb{E}(Z \cdot Z^2) - \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}Z^3 - \mathbb{E}(Z) \cdot \mathbb{E}(Z^2) = 0 - 0 \cdot (1 - 0) = 0.$$

15. Legyen  $Z$  standard normális eloszlású, és  $Y = a + bZ + cZ^2$ . Mutassuk meg, hogy

$$r(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

*Megoldás: Itt ismét először a  $\mathbf{Cov}(Y, Z)$  mennyiséget kell kiszámolnunk. Használva a kovariancia linearitását, illetve az előtő feladat eredményét kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(Y, Z) &= \mathbf{Cov}(a + bZ + cZ^2, Z) = \mathbf{Cov}(a, Z) + \mathbf{Cov}(bZ, Z) + \mathbf{Cov}(cZ^2, Z) = \\ &= 0 + b\mathbf{Cov}(Z, Z) + c\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b\mathbb{D}^2(Z) + c\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b + c \cdot 0 = b \end{aligned}$$

*A szórásnégyzet tulajdonságai alapján:*

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(a + bZ + cZ^2) = b^2\mathbb{D}^2(Z) + c^2\mathbb{D}^2(Z^2) + 2bc\mathbf{Cov}(Z, Z^2) = b^2 + c^2 \cdot 2.$$

*Ugyanis  $\mathbb{D}^2(Z^2) = \mathbb{E}(Z^4) - [\mathbb{E}(Z^2)]^2 = 3 - 1 = 2$ , ahol ismét használtuk, hogy standard normális eloszlás negyedik momentuma 3. Így  $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{b^2 + 2c^2}$ . Ezek alapján*

$$r(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(Y) \cdot \mathbb{D}(Z)} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

*Ezt pedig pontosan azt adja, amit a feladatban be kellett látni.*

16. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje  $X$  illetve  $Y$  a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a  $Z := XY$  valószínűségi változó várható értékét és szórását.

*Megoldás: Tudjuk, hogy  $X = 0, 1, 2, 3$  és  $Y = 0, 1, 2, 3$  értékek lehetségesek, ahol  $X + Y = 3$  teljesül, különben más együttes értékek esetén az együttes valószínűség 0 lesz. Emellett ismertek a következő valószínűségek:  $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{8}$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3}{8}$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{8}$  és  $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{8}$ . Ezek alapján*

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} ij\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \sum_{i,j} i^2j^2\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 0^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3,$$

$$\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{E}(X^2Y^2) - [\mathbb{E}(XY)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

*Így  $\mathbb{D}(XY) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .*

17. Egy gráf csúcsokból, és a csúcsokat összekötő élekből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek  $n$  csúcsát 1-től  $n$ -ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az  $\binom{n}{2}$  csúcspár között egymástól függetlenül van él  $p$  valószínűséggel, és nincs él  $1 - p$  valószínűséggel. Az  $i$  csúcs  $D_i$  fokszáma az  $i$  csúcsból kiinduló élek száma.

(a) Mi a  $D_i$  véletlen szám eloszlása?

(b) Határozzuk meg a  $D_i$  és  $D_j$  változók  $\rho(D_i, D_j)$  korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk  $X_i$ -t mint az  $i$ -ből induló, de nem  $j$ -be érkező élek számát, és  $I_{ij}$ -t mint az  $i$  és  $j$  közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki  $D_i$ -t és  $D_j$ -t az  $X_i$ ,  $X_j$ , és  $I_{ij}$  változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)