Feladatok és megoldások a 11. gyakorlathoz
Építőkari Matematika A3

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény?

   (a) $F(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{1-x} & \text{, ha } x > -1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (b) $F(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (c) $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{4} \cdot (4-x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

2. Az alábbi függvények melyike lehet sűrűségfüggvény?

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{, ha } x > 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2} & \text{, ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 3^{x-1}\ln(3) & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{, ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

3. Számítsuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

   sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó várható értékét és szórását.

4. Mennyi az előző feladatban a $\mathbb{P}\{m - \sigma < X < m + \sigma\}$ illetve a $\mathbb{P}\{m - 2\sigma < X < m + 2\sigma\}$ valószínűségek értéke, ha m jelöli a várható értéket és σ jelöli a szórást?

5. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{, ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényt. Lehet-e f sűrűségfüggvény? Ha igen, milyen c érték esetén?

Ismételjük meg a vizsgálatot az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{, ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényre.

6. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó
$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$
sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

7. Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ értékét, ha X sűrűségfüggvénye

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} x \mathrm{e}^{-x/2} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{, ha } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & \text{, ha } x > 5, \\ 0 & \text{, egyébként?} \end{cases}$

8. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = 2/x^3$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Érdemesebb-e azt az alkatrészt megvenni, melynek élettartama az $f(x) = 1/x^2$, ha $x > 1$ sűrűségfüggvényt követi? Átlagosan mennyit bír a kétféle alkatrész?

9. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?

10. Mi a valószínűsége, hogy három független $(0, 1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

11. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

12. A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

(a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

(b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

13. Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

    (b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

14. Egy busz A és B városok között jár, mely városok egymástól 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése?

15. Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

16. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve 1/3 paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

17. Egy TV élettartama években mérve exponenciális eloszlású, $\lambda = 1/8$ paraméterrel. Ha Józsi vesz egy ilyen típusú használt TV-t, mi a valószínűsége, hogy a következő nyolc évben végig működni fog?

18. Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

19. Egy ketyere javítási ideje (órákban mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 1/2$ paraméterrel.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy a javítás 2 óránál tovább tart?

    (b) Mi a feltételes valószínűsége, hogy a javítás összesen 10 óránál tovább tart, feltéve, hogy már 9 órája zajlik?

20. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél 2/3 annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 óra elteltével éppen 150 égő világít?

21. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális valószínűségi változó:

    (a) $\mathbb{P}\{-1 < X < 1\}$

(b) $\mathbb{P}\{-2 < X < 2\}$
(c) $\mathbb{P}\{-3 < X < 3\}$

22. Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó $\mu = 10$, $\sigma^2 = 36$ paraméterekkel. Határozzuk meg a következő valószínűségeket:
    (a) $\mathbb{P}\{X > 5\}$;
    (b) $\mathbb{P}\{4 < X < 16\}$;
    (c) $\mathbb{P}\{X < 8\}$;
    (d) $\mathbb{P}\{X < 20\}$;
    (e) $\mathbb{P}\{X > 16\}$.

23. Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 5 várható értékkel. Ha $\mathbb{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

24. Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjai közül hány százalék magasabb 2 méter 10 cm-nél?

25. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > 1/2$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

26. Legyen f a μ várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Mutassuk meg, hogy $\mu \pm \sigma$ a függvény két inflexiós pontja.

Eredmények

1.(a) Nem, mert F csökkenő.

(b) Nem, mert $\lim_{x\to\infty} F(x) = 2$.

(c) Igen, ez az exponenciális(1) eloszlásfüggvény.

(d) Igen, folytonos, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ és F monoton növekvő.

2.(a) Nem, f integrálja végtelen.

(b) Nem, $\int_0^2 \frac{\sin(x)}{2}\,\mathrm{d}x \neq 1$.

(c) Igen, $f(x) \geq 0$, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 3^{x-1}\ln(3)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

(d) Igen, ez az exponenciális(2) eloszlás sűrűségfüggvénye.

3.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

4.

$$\mathbb{P}\{m-\sigma < X < m+\sigma\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{4-\sqrt{2}}{6} < X < \frac{4+\sqrt{2}}{6}\Big\} = \int_{\frac{4-\sqrt{2}}{6}}^{\frac{4+\sqrt{2}}{6}} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Mivel $m+2\sigma > 1$, az alábbi integrálás felső korlátját le kell vágnunk 1-nél (ahol a sűrűségfüggvény nullává válik):

$$\mathbb{P}\{m-2\sigma < X < m+2\sigma\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{2-\sqrt{2}}{3} < X < \frac{2+\sqrt{2}}{3}\Big\} = \int_{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}^{1} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{3+4\sqrt{2}}{9}.$$

5 Mindkét függvény előjelet vált az intervallum belsejében (az első függvény $\sqrt{2}$-nél, a második 2-nél), egyik sem lehet sűrűségfüggvény.

6. A feladat szerint azt szeretnénk, hogy az X heti eladásra $\mathbb{P}\{X > V\} = 0.01$ teljesüljön, ahol V a tartály kapacitása. A feladathoz meghatározzuk az eloszlásfüggvényt:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} 5(1-x)^4\,\mathrm{d}x = 1 - (1-a)^5, \qquad 0 < a < 1.$$

Ezzel

$$0.01 = \mathbb{P}\{X > V\} = 1 - F(V) = (1-V)^5,$$

vagyis $1 - V = 0.01^{1/5}$, $V = 1 - 0.01^{1/5} \simeq 0.602$.

7.(a) Parciális integrálással

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{4} x\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{4}x^2 \cdot (-2\mathrm{e}^{-x/2})\Big]_0^\infty + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= [x \cdot (-2\mathrm{e}^{-x/2})]_0^\infty + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 4.$$

Trükkösebben, legyen Y egy exponenciális($\frac{1}{2}$) valószínűségi változó. Ekkor a fenti integrál átírható a következőképpen:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2}\cdot(\mathbb{D}^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2) = \frac{1}{2}\cdot(2^2 + 2^2) = 4.$$

(b) 0, mivel a sűrűségfüggvény x-szel szorozva is integrálható, és szimmetrikus az origóra.

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_5^\infty x \cdot \frac{5}{x^2}\,\mathrm{d}x = [5\ln(|x|)]_5^\infty = \infty.$$

8. Az első alkatrész élettartamának eloszlásfüggvénye

$$F(a) = \int_1^a \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{a^2}, \qquad a > 1,$$

a második alkatrész esetén

$$F(a) = \int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{a}, \qquad a > 1.$$

Annak valószínűsége, hogy hat nap után működnek az alkatrészek $1 - F(6)$ azaz $1/36$ illetve $1/6$. Általában a nap után ez a valószínűség $1-F(a)$, azaz $1/a^2$ illetve $1/a$, nagyobb a második alkatrész esetén, mint az első alkatrésznél. A második alkatrész élettartama *sztochasztikusan dominálja* az első alkatrész élettartamát, érdemes tehát ezt megvenni. Ezt alátámasztja (de nem bizonyítja) a várható értékek kiszámolása is:

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2,$$

míg a második alkatrésznél

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

9. Feltehetjük, hogy a nagymutató egyenletes eloszlású az óra lapján. Ezért annak valószínűsége, hogy a középvonaltól jobbra van $1/2$, és annak valószínűsége, hogy a körív $1/12$ részén van $1/12$.

10. Annak valószínűsége, hogy az első változó az első intervallumba esik, a második változó a második intervallumba esik, és a harmadik változó a harmadik intervallumba esik $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. Azonban ez megtörténhet bármilyen más sorrendben is, így ezt az eredményt be kell szoroznunk a három változó $3! = 6$ sorrendjével, és a válasz $6/27 = 2/9$.

11. Legyen L a rudak középpontjainak távolsága. Feltesszük, hogy $L > D + d$, ellenkező esetben a valószínűség nulla. A probléma periodicitása miatt elég két szomszédos rúd középpontja között vizsgálódnunk, ahol feltehetjük, hogy a labda középpontjának X vízszintes koordinátája egyenletes eloszlású. A labda ütközik akkor és csak akkor, ha $X < \frac{D+d}{2}$ vagy $X > L - \frac{D+d}{2}$. E két halmaz együttes „hosszúsága” $D+d$, ezért az ütközés valószínűsége $\frac{D+d}{L}$, a válasz pedig $1 - \frac{D+d}{L} = \frac{L-D-d}{L}$.

12.(a) A felé indul az utas, ha érkezési ideje a $(7{:}05,\ 7{:}15] \cup (7{:}20,\ 7{:}30] \cup (7{:}35,\ 7{:}45] \cup (7{:}50,\ 8{:}00]$ halmazba esik. E halmaz „hossza” 40 perc, az A felé indulás valószínűsége tehát $40/60 = 2/3$, B felé pedig az esetek $1/3$-ában lesz indulás.

(b) A felé indul az utas, ha érkezési ideje a $[7{:}10,\ 7{:}15] \cup (7{:}20,\ 7{:}30] \cup (7{:}35,\ 7{:}45] \cup (7{:}50,\ 8{:}00] \cup (8{:}05,\ 8{:}10]$ halmazba esik. E halmaz „hossza” ismét 40 perc, az A felé indulás valószínűsége tehát most is $40/60 = 2/3$, és B felé most is az esetek $1/3$-ában lesz indulás.

13. Legyen a busz érkezési ideje X.

1. $\mathbb{P}\{X > 10{:}10\} = 20/30 = 2/3$.
2. $\mathbb{P}\{X > 10{:}25 \,|\, X > 10{:}15\} = \mathbb{P}\{X > 10{:}25\}/\mathbb{P}\{X > 10{:}15\} = \frac{5/30}{15/30} = 1/3$. Megjegyzés: egyenletes eloszlású várakozási idő esetén, feltéve, hogy a várt esemény még nem következett be, a hátralevő várakozási idő is egyenletes lesz (a hátralevő lehetséges intervallumon).

14. Először is tisztáznunk kell, mit jelent az a szó, hogy „gazdaságos” ebben a helyzetben. Egy jó értelmezés lehet lerobbanástól a legközelebbi szervizig mért D távolság várható értékének minimalizálása. Legyen a három szerviz $a < b < c$ távolságra A-tól. Ekkor

$$D = \begin{cases} a - X & \text{, ha } 0 < X < a, \\ X - a & \text{, ha } a < X < [a+b]/2, \\ b - X & \text{, ha } [a+b]/2 < X < b, \\ X - b & \text{, ha } b < X < [b+c]/2, \\ c - X & \text{, ha } [b+c]/2 < X < c, \\ X - c & \text{, ha } c < X < 100. \end{cases}$$

X egyenletes, sűrűségfüggvénye $1/100$ a két város között, így

$$\mathbb{E}(D) = \frac{1}{100} \cdot \Big[\int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_b^{\frac{b+c}{2}} (x-b)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{b+c}{2}}^c (c-x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{100} (x-c)\,\mathrm{d}x \Big]$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \Big[\frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{(c-b)^2}{4} + \frac{(100-c)^2}{2} \Big].$$

A jelenlegi helyzetben $a = 0,\ b = 50,\ c = 100$, és $\mathbb{E}(D) = 12.5$ kilométer. A javasolt elrendezésben $a = 25,\ b = 50,\ c = 75$, és $\mathbb{E}(D) = 9.375$ kilométer, eszerint tehát jobb, mint a jelenlegi elrendezés. Nem nehéz látni, hogy az optimális elrendezés (mely minimalizálja $\mathbb{E}(D)$-t) $a = 50/3 \simeq 16.7,\ b = 50,\ c = 250/3 \simeq 83.3$.

Egy kissé nehezebb, de nem túl nehéz azt sem átgondolni, hogy a javasolt $a = 25,\ b = 50,\ c = 75$ elrendezés *sztochasztikusan jobb* a jelenlegi helyzetnél, azaz $\mathbb{P}\{D < d\}$ minden d-re nagyobb egyenlő a javasolt elrendezésben, mint jelenleg. Érdeklődők azt is beláthatják, hogy az $\mathbb{E}(D)$-t optimalizáló $a = 50/3,\ b = 50,\ c = 250/3$ elrendezés *sztochasztikusan is optimális*, azaz minden d-re egyszerre maximalizálja a $\mathbb{P}\{D < d\}$ valószínűséget. Ez azt jelenti, hogy a javasolt elrendezés nem csak $\mathbb{E}(D)$ tekintetében jobb a jelenleginél, illetve a harmadik elrendezés nem csak $\mathbb{E}(D)$-t optimalizálja, hanem D-nek bármilyen monoton növő $g(D)$ függvényére is $\mathbb{E}(g(D))$ kisebb a javasolt elrendezésben mint jelenleg, illetve a lehető legkisebb a harmadik elrendezésben. Például biztosak lehetünk benne, hogy a javasolt elrendezés a távolság négyzete $\mathbb{E}(D^2)$ várható értékének tekintetében is jobb a jelenleginél, illetve a harmadik elrendezés $\mathbb{E}(D^2)$-et is optimalizálja.

Ezek az állítások a feladat egyszerűségének következményei, bonyolultabb esetekben nem feltétlenül érhető el sztochasztikusan optimális megoldás. Ekkor elképzelhető, hogy valamilyen D célfüggvényre $\mathbb{E}(D)$ az egyik fajta elrendezésben lesz minimális, míg például $\mathbb{E}(D^2)$ egy másikfajta elrendezésben lesz a legkisebb, és külön tisztázni kell, hogy mit jelent a „jó” és a „kevésbé jó” elrendezés.

16. Ha X a beszélgetés hossza, akkor $\mathbb{P}\{X > 5\} = 1 - F(5) = \mathrm{e}^{-5/3}$. Ha már 2 perce tart a beszélgetés, akkor

$$\mathbb{P}\{X > 2+5 \,|\, X > 2\} = \frac{\mathbb{P}\{X > 2+5\}}{\mathbb{P}\{X > 2\}} = \frac{1 - F(2+5)}{1 - F(2)} = \frac{\mathrm{e}^{-[2+5]/3}}{\mathrm{e}^{-2/3}} = \mathrm{e}^{-5/3} = \mathbb{P}\{X > 5\}.$$

Az egyenlet az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát fejezi ki, a feltétel nem befolyásolja a hátralevő idő eloszlását.

17. Az örökifjú tulajdonság miatt a válasz ugyanaz, mintha Józsi új rádiót vásárolna: $\mathbb{P}\{X > 8\} = \mathrm{e}^{-8 \cdot 1/8} = \mathrm{e}^{-1}$.

18. Az átlagos működési idő $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, és annak valószínűsége, hogy ennél tovább működik a berendezés $\mathbb{P}\{X > 1/\lambda\} = \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1/\lambda} = \mathrm{e}^{-1}$, λ értékétől függetlenül. A msodik kérdés megválaszolásához már kell λ értéke, melyet a $\mathbb{P}(X < 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.02$ egyenlet megoldásával kapunk. Ha g a garanciális idő, akkor $\mathbb{P}(X < g) = 0.05$, azaz $1 - e^{-\lambda g} = 0.05$ egyenletet kell megoldani g-re a kiszámolt λ mellett.

19.(a) $\mathbb{P}\{X > 2\} = \mathrm{e}^{-2\cdot 1/2} = \mathrm{e}^{-1}$.

(b) Az örökifjúság miatt $\mathbb{P}\{X > 10 \mid X > 9\} = \mathbb{P}\{X > 9+1 \mid X > 9\} = \mathbb{P}\{X > 1\} = \mathrm{e}^{-1\cdot 1/2} = \mathrm{e}^{-1/2}$.

20. Annak a valószínűsége, hogy egy adott égő világít $\mathbb{P}\{X > 1000\} = \mathrm{e}^{-1000\lambda}$. A λ paraméter értékét pedig a megadott adatból számolhatjuk: $\frac{2}{3} = \mathbb{P}\{X > 2000\} = \mathrm{e}^{-2000\lambda}$ amiből

$$p := \mathbb{P}\{X > 1000\} = \mathrm{e}^{-1000\lambda} = [\mathrm{e}^{-2000\lambda}]^{1/2} = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{1/2}.$$

Az 1000 óra után világító égők Y száma binomiális, ezzel a p, és $n = 200$ paraméterekkel. Ezért a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}\{Y = 150\} = \binom{200}{150} \cdot p^{150} \cdot [1-p]^{50} = \binom{200}{150} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^{75} \cdot \Big[1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{1/2}\Big]^{50} \simeq 0.00429.$$

21. Általánosan, $x > 0$-ra

$$\mathbb{P}\{-x < X < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\Phi(x) - 1.$$

A normális eloszlás táblázatából behelyettesítve $\mathbb{P}\{-1 < X < 1\} \simeq 0.6826$, $\mathbb{P}\{-2 < X < 2\} \simeq 0.9544$, $\mathbb{P}\{-3 < X < 3\} \simeq 0.9974$.

22.(a) $\mathbb{P}\{X > 5\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq 5\} = 1 - F(5) = 1 - \Phi\big(\frac{5-10}{6}\big) = 1 - \Phi\big(-\frac{5}{6}\big) = \Phi\big(\frac{5}{6}\big) \simeq 0.7967$;

(b) $\mathbb{P}\{4 < X < 16\} = F(16) - F(4) = \Phi\big(\frac{16-10}{6}\big) - \Phi\big(\frac{4-10}{6}\big) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826$;

(c) $\mathbb{P}\{X < 8\} = F(8) = \Phi\big(\frac{8-10}{6}\big) = \Phi\big(-\frac{1}{3}\big) = 1 - \Phi\big(\frac{1}{3}\big) \simeq 0.3707$;

(d) $\mathbb{P}\{X < 20\} = F(20) = \Phi\big(\frac{20-10}{6}\big) = \Phi\big(\frac{5}{3}\big) \simeq 0.9525$;

(e) $\mathbb{P}\{X > 16\} = 1 - F(16) = 1 - \Phi\big(\frac{16-10}{6}\big) = 1 - \Phi(1) \simeq 0.1587$.

23. Adott, hogy

$$0.2 = \mathbb{P}\{X > 9\} = 1 - F(9) = 1 - \Phi\Big(\frac{9-5}{\sigma}\Big),$$

amiből $\Phi\big(\frac{4}{\sigma}\big) = 0.8$. A táblázatot visszafelé használva $4/\sigma \simeq 0.84$, tehát $\sigma \simeq 4.76$, és a szórásnégyzet $\sigma^2 \simeq 22.7$.

24. Jelöljük a magasságot X-szel, ekkor $\mathbb{P}\{X > 200\} = 1 - F(200) = 1 - \Phi\big(\frac{200-180}{13}\big) \simeq 0.0618$. A második kérdés egy feltételes valószínűség:

$$\mathbb{P}\{X > 210 \mid X > 200\} = \frac{\mathbb{P}\{X > 210\}}{\mathbb{P}\{X > 200\}} = \frac{1 - F(210)}{1 - F(200)} = \frac{1 - \Phi\big(\frac{210-180}{13}\big)}{1 - \Phi\big(\frac{200-180}{13}\big)} \simeq 0.168.$$

25. Ha X normális, akkor $\mathbb{P}\{X > 1/2\} = 1 - \Phi(1/2) \simeq 0.309$. Ha X egyenletes, akkor a várható érték és a szórás ismeretében meg kell határoznunk azt az (α, β) intervallumot, ahol X felveszi az értékeit:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 0,$$

$$\mathbb{D}(x) = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} = 1,$$

melyből $\alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3}$. Ezért

$$\mathbb{P}\{X > 1/2\} = \frac{\sqrt{3} - 1/2}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} \simeq 0.356,$$

nagyobb, mint a normális esetben.

26. Az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

normális sűrűségfüggvény első és második deriváltja

$$f'(x) = \frac{-(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{illetve} \qquad f''(x) = \frac{-\sigma^2 + (x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

A második deriváltban a mindig pozitív exponenciális tagot egy x-ben másodfokú polinom szorozza, mely a $\mu \pm \sigma$ zérushelyeinél előjelet vált, ezért itt vannak f inflexiós pontjai.