

**Feladatok és megoldások a 13. hétre**  
*Építőkarai Matematika A3*

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}x' + 2y' - 3x + 4y &= 2 \sin t, \\2x' + y' + 2x - y &= \cos t.\end{aligned}\tag{1}$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}x' - 2x + y &= e^t, \\y' - 3x + 2y &= t.\end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}x' - 2x + 5y &= -\cos t, \\y' - x + 2y &= \sin t.\end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}x' - x - y &= e^{-2t}, \\y' - 4x + 2y &= -2e^t.\end{aligned}$$

**Eredmények**

1.

$$\begin{aligned}2(D - 3)x + 2(D + 2)y &= 2 \sin t \\2(D + 1)x + (D - 1)y &= \cos t.\end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer determinánsa:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D - 3 & 2(D + 2) \\ 2(D + 1) & D - 1 \end{vmatrix} = D^2 - 4D + 3 - 4(D^2 + 3D + 2) = -3D^2 - 16D - 5 \neq 0.\tag{2}$$

A  $\Delta \neq 0$  kikötés mellett keresünk megoldást. A végén ellenőrizzük, hogy a kapott megoldásokra  $\Delta x$  ill.  $\Delta y$  nem azonosan 0 (de ez az alábbiakban felírt inhomogén lineáris egyenletekre kizárható).

Cramer-szabály alapján:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 \sin t & 2(D + 2) \\ \cos t & D - 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} D - 3 & 2 \sin t \\ 2(D + 1) & \cos t \end{vmatrix}.\tag{3}$$

Kiszámoljuk ezen két egyenlet jobb oldalain levő determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 2 \sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix} = 2 \cos t - 2 \sin t + 2 \sin t - 4 \cos t = -2 \cos t$$

és

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2 \sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix} = -\sin t - 3 \cos t - (4 \cos t + 4 \sin t) = -5 \sin t - 7 \cos t.$$

Felhasználva, hogy a (2) egyenletből  $\Delta = -3D^2 - 16D - 5$  kapjuk, hogy a (3)-beli egyenletek:

$$\begin{aligned} -3x'' - 16x' - 5x &= -2 \cos t, \\ -3y'' - 16y' - 5y &= -5 \sin t - 7 \cos t. \end{aligned} \quad (4)$$

Ezeket a már tanult módon megoldva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8 \sin t + \cos t), \\ y &= c_3 e^{-t/3} + c_4 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61 \sin t - 33 \cos t) \end{aligned} \quad (5)$$

Helyettesítsük ezeket az eredeti (az (1) egyenlet rendszerbeli) második egyenletbe. Kapjuk, hogy:

$$\left( \underbrace{\frac{4}{3}c_1 - \frac{4}{3}c_3}_0 \right) e^{-t/3} + \underbrace{(-8c_2 - 6c_4)}_0 e^{-5t} = 0.$$

Innen:

$$c_3 = c_1 \text{ és } c_4 = -\frac{4}{3}c_2.$$

Ezeket visszahelyettesítve (5)-be kapjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8 \sin t + \cos t), \\ y &= c_1 e^{-t/3} - \frac{4}{3}c_2 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61 \sin t - 33 \cos t). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t + t, \\ y &= c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + 2t - 1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t \cos t - t \sin t, \\y &= \frac{2c_1 - c_2 - 3}{5} \cos t + \frac{c_1 + 2c_2 + 1}{5} \sin t + t \cos t.\end{aligned}$$

Vagy más alakban:

$$\begin{aligned}x &= 5c_1 \cos t + 5c_2 \sin t + 2t \cos t - t \sin t - \cos t, \\y &= c_1(2 \cos t + \sin t) + c_2(-\cos t + 2 \sin t) + t \cos t - \cos t.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t, \\y &= -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - e^{-2t}.\end{aligned}$$