

## Feladatok a második hétre

1. Határozzuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

(a)

$$y' - y = e^{-x},$$

(b)

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

2. Tekintsük az

$$y' - 2y = 3e^t$$

differenciálegyenletet.

(a) Határozzuk meg az iránymezőt!

(b) Az iránymező vizsgálata után adjuk meg, hogyan viselkednek a megoldások nagy  $t$  esetén!

(c) Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását és vizsgáljuk meg, hogy ez hogyan viselkedik, ha  $t \rightarrow \infty$ !

3. Határozzuk meg a következő kezdetiérték-problémák megoldásait!

(a)

$$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$$

(b)

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = 1/2, \quad t > 0$$

(c)

$$ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$$

4. A feladat (a), (b) és (c) pontjaiban  $dy/dt = f(y)$  alakú differenciálegyenletet tekintünk. Mindegyik esetben először rajzolja le a  $y \rightarrow f(y)$  függvény grafikonját, határozza meg a kritikus (egyensúlyi) pontokat, és osztályozza mindegyiket mint asszimptotikusan stabil Lyapunov stabil vagy instabil. Rajzolja le a fázisvonalakat és rajzolja le néhány megoldás görbéjét (közelítőleg) a  $t, y$  síkon.

(a)

$$dy/dt = y(y - 1)(y - 2), \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

(b)

$$dy/dt = e^y - 1, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

(c)

$$dy/dt = -2(\operatorname{arctg} y)/(1 + y^2), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

(d)

$$y' = y^4 - 2y^3 - 15y^2$$

A következő tételt tanultuk az előadáson:

**1. TÉTEL.** *Tegyük fel, hogy mind az  $f$ , mind a  $\partial f/\partial y$  folytonos függvények egy olyan  $\alpha < t < \beta$ ,  $\gamma < y < \delta$  téglalapon, amely tartalmazza a  $(t_0, y_0)$  pontot. Akkor van olyan  $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$  intervallum, amelyben a következő kezdetiérték-probléma megoldása létezik és egyértelmű:*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

5. A következő három problémában határozzuk meg a  $ty$  síknak azon részeit, ahol a tétel feltételei teljesülnek:

(a)

$$y' = \frac{t - y}{2t + 5y}$$

(b)

$$y' = \frac{\ln |ty|}{1 - t^2 - y^2}$$

(c)

$$y' = (t^2 + y^2)^{3/2}$$

Daniel Bernoulli 1760-ban már használt matematikai módszereket a himlő terjedésének vizsgálatára. A következő két feladatban egyszerű modelleket látunk erre a problémára. Hasonló modelleket használnak a rémhírek terjedésének modellezésére és bizonyos árucikkek terjedésének vizsgálatára.

6. Tegyük fel, hogy valamely populáció két részre osztható: azokra, akik megkaptak egy bizonyos betegséget és képesek megfertőzni másokat, és azokra, akik a betegséget még nem kapták, meg de hajlamosak arra, hogy a betegséget megkapják. Az utóbbiaknak a teljes populációhoz viszonyított arányát nevezzük  $x$ -nek, és az előbbinek a teljes populációhoz viszonyított arányát  $y$ -nak. Tehát  $x + y = 1$ . Tegyük fel, hogy a betegség azáltal terjed, hogy egészséges és beteg egyének találkoznak és a betegség terjedésének  $dy/dt$  sebessége arányos ezen találkozások számával. Tegyük

fel, hogy az egészséges és beteg emberek szabadon mozognak egymás között, tehát az egymással való találkozásaik száma arányos  $x \cdot y$ -nal. Mivel  $x = 1 - y$ , ezért

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0,$$

ahol  $\alpha > 0$  arányossági tényező és  $y_0$  a beteg egyének aránya a teljes populációban kezdetben.

- (a) Határozzuk meg az egyensúlyi állapotokat és osztályozzuk őket aszerint, hogy asszimptotikusan stabilak vagy instabilak-e.
- (b) Oldjuk meg a fenti kezdetiérték-problémát és ezáltal igazoljuk, hogy az előző pontban levont következtetésünk helyes volt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$$

vagyis a betegség az egész populációt megfertőzi.

7. Bizonyos betegségek (pl. tífusz) többnyire hordozók által terjednek, vagyis olyan személyek által, akik terjesztik a betegséget, de a betegség szimptomái nem látszanak rajtuk. Jelentse  $x$  azon egyének arányát az egész populációhoz viszonyítva akik megkaphatják a betegséget (de most még teljesen egészségesek) és legyen  $y$  a hordozók aránya az egész populációhoz képest. Tegyük fel, hogy a hordozókat felfedezik és eltávolítják a populációból  $\beta$  sebességgel. Vagyis

$$dy/dt = -\beta \cdot y. \tag{2}$$

(Időegység alatt az akkor éppen létező hordozók  $\beta$ -ad részét eltávolítják.) Tegyük fel, hogy a betegség terjedése arányos  $x \cdot y$ -nal (vagyis a hordozók és a megfertőzhető emberek szabadon találkoznak egymással). A

$$dx/dt = -\alpha xy. \tag{3}$$

- (a) A (2) egyenletet megoldva határozzuk meg  $y$ -t mint a  $t$  függvényét feltéve, hogy kezdetben  $y(0) = y_0$ .
- (b) Az előző pont eredményét használva oldjuk meg a (3) egyenletet feltéve, hogy  $x(0) = x_0$ .
- (c) Határozzuk meg a populáció azon egyéneinek az arányát, akik sohasem kapják meg a betegséget azáltal, hogy kiszámoljuk a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

határértékét.

## Eredmények és megoldások

Ezek az egyenletek

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (4)$$

alakú egyenletek, melyeknek megoldását a következőképpen kapjuk:

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p}, \quad (5)$$

vagyis a (4) inhomogén egyenlet általános megoldása  $y_{i,alt}$  egyenlő az

$$Y' + p(x)Y = 0 \quad (6)$$

homogén egyenlet általános megoldása  $Y_{h,alt}$  plusz a (4) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása  $y_{i,p}$ .

1. (a) Itt  $p(x) \equiv -1$ ;  $q(x) = e^{-x}$ . A megoldás két lépésből áll:

**1. lépés.** A homogén rész az  $Y' - Y = 0$  diff.egyenlet szétválasztható változójú és megoldása:  $Y_{h,alt} = C \cdot e^x$ .

**2. lépés.** Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását,  $y_{i,p}$ -t. Ehhez meg szeretnénk határozni egy olyan  $C(x)$  függvényt, amelyre

$$y = C(x) \cdot e^x$$

megoldása az  $y' - y = e^{-x}$  egyenletnek. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy  $C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$  egy ilyen függvény, tehát

$$y_{i,p} = C(x) \cdot e^x = -\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Vagyis

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p} = \underbrace{C \cdot e^x}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right)}_{y_{i,p}}.$$

- (b) Itt  $p(x) = -\frac{1}{x}$ ;  $q(x) = x^2 + 3x - 2$ . A megoldás két lépésből áll:

**1. lépés.** A homogén rész az  $Y' - \frac{Y}{x} = 0$  diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása:  $Y_{h,alt} = C \cdot x$ .

**2. lépés.** Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását,  $y_{i,p}$ -t. Ehhez szeretnénk határozni egy olyan  $C(x)$  függvényt, amelyre

$$y = x \cdot C(x)$$

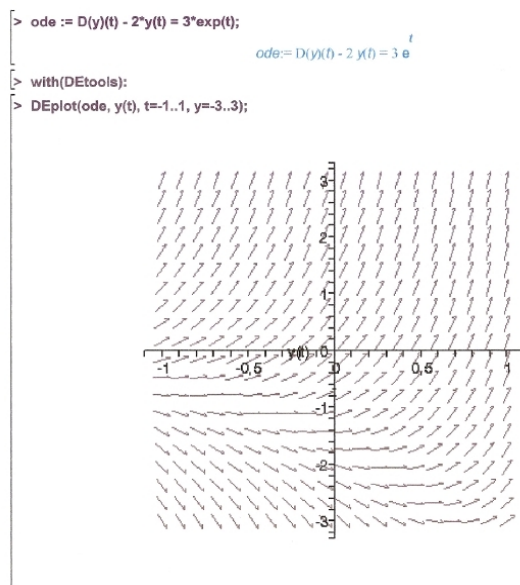
megoldása az  $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$  egyenletnek. Mivel  $y' = C(x) + xC'(x)$ , ezt behelyettesítve az  $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$  egyenletbe kapjuk, hogy

$$C(x) + xC'(x) - C(x) = x^2 + 3x - 2.$$

Innen:  $C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln|x|$  (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstans, mert csak egy partikuláris megoldást keresünk). Tehát  $y_{i,p} = x \cdot C(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x \ln|x|$ . Így

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{c\dot{x}}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x \ln|x|}_{y_{i,p}}.$$

2. (a) Ld. 1. ábra



1. ábra. Megoldás a MAPLE használatával

(b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$  vagy  $-\infty$  ( $C$  előjelétől függően, lásd alább).

(c)  $y(t) = -3e^t + C \cdot e^{2t}$ , ezért

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t(-3 + Ce^t) = +\infty, \quad \text{ha } C > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t(-3 + Ce^t) = -\infty, \quad \text{ha } C \leq 0.$$

3. (a)

$$y(t) = (2te^t - 2e^t + 3)e^t$$

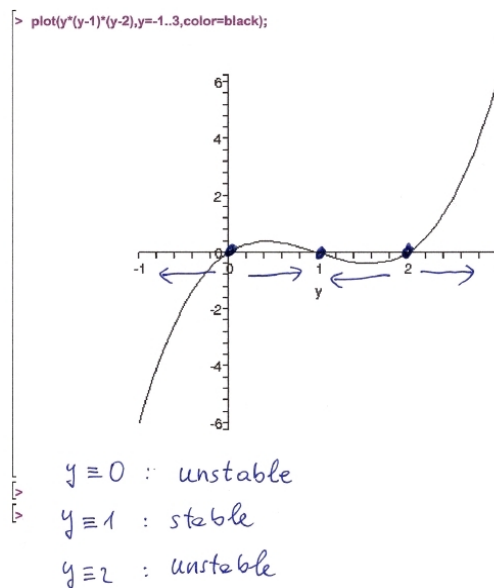
(b)

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

(c)

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t} - 2\frac{e^{-t}}{t}$$

4. (a) Ld. 2. ábra



2. ábra. Ha  $f(y) > 0$ , akkor  $y(t)$  növekvő, ha  $f(y) < 0$ , akkor  $y(t)$  csökkenő

(b)  $y \equiv 0$ : instabil

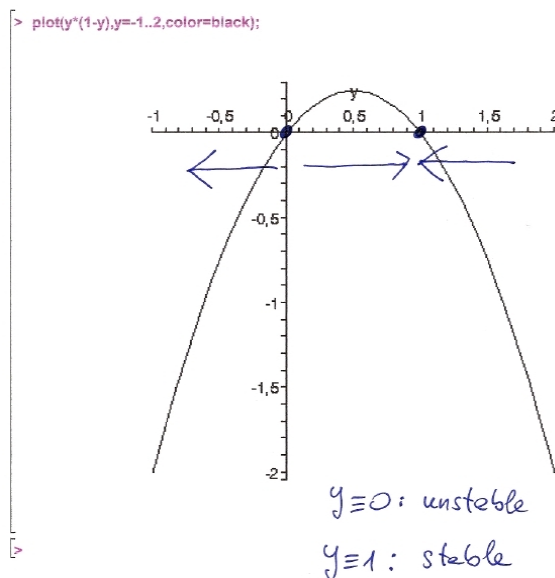
(c)  $y \equiv 0$ : aszimptotikusan instabil

5. (a)  $2t + 5y > 0$  vagy  $2t + 5y < 0$ .

(b)  $1 - t^2 - y^2 > 0$  vagy  $1 - t^2 - y^2 < 0$  (vagy a  $t^2 + y^2 = 1$  egyenletű kör belseje, vagy a külseje).

(c) Mindenütt teljesülnek a feltételek.

6. (a) Ld. 3. ábra



3. ábra. Ha  $f(y) > 0$ , akkor  $y(t)$  növekvő, ha  $f(y) < 0$ , akkor  $y(t)$  csökkenő

(b)  $y = y_0 / [y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}] \rightarrow 1$ , ha  $t \rightarrow \infty$  (előbb-utóbb mindenki megbetegszik).

7. (a)  $y = y_0 e^{-\beta t}$

(b)  $x = x_0 \exp[-\alpha y_0 (1 - e^{-\beta t}) / \beta]$

(c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \exp[-\alpha y_0 / \beta]$  (itt beáll egy beteg-egészséges arány, míg a hordozók aránya 0-ig csökken).