

3. heti gyakorlat: Egzakt d.e. és 2. heti elmaradások.

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

(a) $2x \cos y + [2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y] y' = 0,$

(b) $xdy + ydx = 0,$

(c) $\frac{x}{x^2+y^2}y' = \frac{y}{x^2+y^2},$

(d) $2x(\sin y + 1) + x^2 \cos y \cdot y' = 0.$

2. Alkalmazza az egzisztencia és unicitási tételt a 2. heti gyakorlat 5. feladatában!

3. Rajzolja le a fázisvonalakat, vázolja az iránymezőt és osztályozza az egyensúlyi megoldásokat:

(a)
$$y' = y^4 - 2y^3 - 15y^2$$

(b)
$$y' = y^4 + y^3 - 20y^2$$

(c)
$$y' = (y - 3)(y + 1)^2$$

Eredmények

1. (a) Az $y' = \frac{dy}{dx}$ -et felírva és dx -el mindkét oldalt beszorozva kapjuk, hogy az egyenlet

$$\underbrace{2x \cos y dx}_{M(x,y)} + \underbrace{[2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y] dy}_{N(x,y)} = 0$$

alakú. Mivel

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin y,$$

ezért a differenciálegyenlet egzakt, tehát van olyan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\mathbf{grad}(F) = (M, N).$$

Vagyis

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Ezért

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) = x^2 \cos y + h(y). \quad (1)$$

A $h(y)$ függvény abból az egyenletből határozzuk meg hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Vagyis:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 \sin y + h'(y) = \underbrace{2y \cos y - (x^2 + y^2) \sin y}_N.$$

Innen

$$h'(y) = 2y \cos y - y^2 \sin y.$$

Innen

$$h(y) = y^2 \cos y.$$

Ezt vissza helyettesítve (1)-be adódik, hogy:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) \cos y.$$

Vagyis a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(x^2 + y^2) \cos y = \text{Const.}$$

(b) $xy = \text{Const}$

(c) $\arctan \frac{y}{x} = \text{Const} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \text{Const} \Leftrightarrow y = Cx$

Megjegyzés: ha $x^2 + y^2 \neq 0$ teljesül, akkor mindkét oldalt beszorozva $x^2 + y^2$ -tel a következő szétválasztható d.e. adódik:

$$xy' = y$$

(d) $x^2 \sin y + x^2 = \text{Const}$

3. (a) $f(y)$ gyökeit és előjelét nézve: $y = -3$: aszimptotikusan stabil, $y = 0$: félig stabil, $y = 5$: instabil egyensúlyi megoldás.

