Feladatok az 4. hétre. Eredményekkel és néhol kidolgozott megoldásokkal

1. Oldjuk meg a következő kezdetiérték-feladatot:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$$

2. Ha egy rudat az x abszcisszájú keresztmetszetében adott $f(x)$ függvénnyel arányos hajlítónyomaték terhel, akkor a rúd súlyvonalának alakja a terhelés után az alábbi differenciálegyenletből számítható:

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = f(x).$$

Határozzuk meg a rúd alakját, ha a nyomaték eloszlás

$$f(x) = 1 - x,$$

és a kezdeti feltételek

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

3. Határozzuk meg az általános megoldását a következő másodrendű differenciálegyenleteknek (a megoldásokat elég implicit alakban megadni):

   (a)
$$(y')^2 + 2yy'' = 0,$$

   (b)
$$y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}},$$

   (c)
$$yy'' + (y')^2 = 1.$$

4. Oldjuk meg a következő másodrendű differenciálegyenletet: $xy'' - y' = x^3$.

5. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0.$$

Először ellenőrizzük le, hogy az

$$Y_1 = t, \qquad Y_2 = te^t$$

függvények a megfelelő $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ homogén egyenlet fundamentális megoldását adják. Ezek után határozzuk meg az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldását!

Megjegyzés: Y_1-re rájönni egyszerű, viszont Y_2 megkeresésére javasoljuk a **konstans variációs módszer**t:

$Y_2(t) = C(t) \cdot Y_1(t)$ alakban keresve a homogén egyenlet megoldását, szintén kijön te^t. Próbálják ki!

Eredmények

1. A differenciálegyenlet mindkét oldalát kétszer x szerint deriváljuk:

$$y' = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1,$$

$$y = \int (\arcsin x + C_1) dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2.$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= 1 + C_2 \\ 1 = y'(0) &= \arcsin 0 + C_1, \end{aligned}$$

vagyis

$$C_1 = 1 \text{ és } C_2 = 2.$$

Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x + 2.$$

2. A másodrendű egyenletünkből hiányzik az y. Tehát amint előadáson tanultuk, ekkor a $p = p(x)$ új változót behozzuk az y' helyére. Vagyis

$$p(x) = y'(x) \text{ és } p'(x) = y''(x).$$

Az új változóval az egyenletünk alakja átrendezés után:

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int f(x) dx.$$

Bevezetve az

$$\int f(x) dx = F(x)$$

jelölést, az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = F(x) + c_1.$$

Innen p-t kifejezve:

$$p(x) = \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + C - 1)^2}}.$$

Használva, hogy $y' = p$ kapjuk, hogy

$$y = \int \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + c_1)^2}} dx. \tag{1}$$

Abban a speciális esetben, amikor $f(x) = 1 - x$ integrálással kapjuk, hogy

$$F(x) + c_1 = x(1 - \frac{x}{2}) + c_1.$$

Ekkor tehát

$$y' = p = \frac{x(1 - \frac{x}{2}) + c_1}{\sqrt{1 - \left(x(1 - \frac{x}{2}) + c_1\right)^2}}.$$

Használva az $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt, és azt, hogy egy tört pontosan akkor egyenlő nullával amikor a számlálója nulla, adódik, hogy

$$c_1 = 0.$$

Ezt helyettesítve (1)-ba, és kihasználva, hogy $y(0) = 0$:

$$y(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{t(1 - \frac{t}{2})}{\sqrt{1 - t^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2}} dt.$$

Ez azonban egy ún. *elliptikus integrál*, amit nem lehet elemi függvényekkel kifejezni.

3. A hiányos másodrendű d.e.-k megoldásához az $y'(x) = p(y)$, $y''(x) = p'(y)p(y)$ helyettesítést alkalmazzuk:

   (a) $(y')^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow p^2(y) + 2yp(y)p'(y) = 0 \Rightarrow p(y)(p(y) + 2yp'(y)) = 0$
   Ha $p(y) \equiv 0$, akkor $y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$ jó megoldás lesz. Ellenkező esetben elég a zárójelben lévő $p(y) + 2yp'(y) = 0$ kifejezést vizsgálni, ami egy szétválasztható d.e., a megoldása $p(y) = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$. Azaz

$$y'(x) = \frac{C_1}{\sqrt{y(x)}} \qquad \Rightarrow \qquad \int \sqrt{y} dy = \int C_1 dx$$
$$\frac{2}{3} y^{3/2} = C_1 x + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = (C_1 x + C_2)^{2/3}.$$

   Megjegyzés: más konstansokkal $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$ is jó.

(b)

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad &\Rightarrow \quad p(y)p'(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} \\
\int p(y)dp(y) = \int \frac{1}{4\sqrt{y}}dy \quad &\Rightarrow \quad \frac{p(y)^2}{2} + C_1' = \frac{\sqrt{y}}{2} + C_2' \\
(y')^2 = \sqrt{y} + C_1 \quad &\Rightarrow \quad y' = \sqrt{\sqrt{y} + C_1} \\
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}dy \quad &= \quad \int 1dx = x + C_2'
\end{aligned}$$

Az integrálban helyettesítést hajtunk végre: $u = \sqrt{y}$, továbbá $dy = 2udu$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}dy \quad &= \quad \int \frac{2u}{\sqrt{u + C_1}}dy = \\
= \int \frac{2(u + C_1)}{\sqrt{u + C_1}} - \frac{2C_1}{\sqrt{u + C_1}}dy \quad &= \quad \int 2\sqrt{u + C_1}dy - 2C_1 \int \frac{1}{\sqrt{u + C_1}}dy = \\
= \frac{4}{3}\sqrt{u + C_1}^3 - 4C_1\sqrt{u + C_1} \quad &= \quad x + C_2'
\end{aligned}$$

Innen y-t visszahelyettesítve:

$$3x = 4\sqrt{\sqrt{y} + C_1}^3 - 12C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$$

(c)

$$yy'' + (y')^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad yp'p + p^2 = 1.$$

Látható, hogy $p \neq 0$, ha pedig $y = 0$, akkor $p = 1$ vagy $p = -1$. A fenti

$$p' = \frac{1 - p^2}{py}$$

szétválasztható d.e. megoldása az $y = 0$ esetben $p = \pm 1$, különben pedig

$$\int \frac{p}{1 - p^2}dp = \int \frac{1}{y}dy,$$

ahonnan $1 - p^2 = \frac{C_1}{y^2}$ tetszőleges C_1 pozitív vagy negatív (de nem 0) konstanssal. Ha $y' = p = \pm 1$, akkor $y = \pm x + C$. Egyéb esetekben

$$p^2 = 1 + \frac{C_1}{y^2}, \quad C_1 \neq 0.$$

Visszahelyettesítve $y'(x) = p(y)$-t:

$$(y')^2 = \frac{C_1}{y^2} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad y' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1}} \quad = \quad \pm \int 1 dx = \pm x + C_2$$

Az integrál kiszámításához alakítsuk át a baloldalt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1}{y^2} + 1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1 + y^2}{y^2}}} = \int \frac{|y|}{\sqrt{C_1 + y^2}} dy = \sqrt{C_1 + y^2},$$

ahol persze C_1 olyan, hogy a gyökjel alatt nem-negatív mennyiség áll. Tehát a megoldás:

$$\sqrt{C_1 + y^2} = \pm x + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = (\pm x + C_2)^2 - C_1.$$

Vagy más konstansokkal fölírva:

$$y^2 - (x + C_2)^2 = C_1 \text{ ill. } y^2 - (-x + C_2)^2 = C_1,$$

ami $C_1 = 0$ esetben magába foglalja az $y = \pm x + C$ megoldást is.

4. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2.$

5. Először is a $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ homogén egyenlet megoldásait adjuk meg. Tudjuk, hogy $Y_1(t) = t$ megoldja az egyenletet, azaz:

$$t^2 Y_1''(t) - t(t+2)Y_1'(t) + (t+2)Y_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -t(t+2) + (t+2)t = 0 \tag{2}$$

A tőle lineárisan független megoldást $Y_2(t) = C(t)Y_1(t) = C(t)t$ alakban keressük (*egy konstans variációs módszer*). Innen $Y_2(t)$ deriváltjai (általános esetben):

$$\begin{aligned} Y_2'(t) &= C'(t)Y_1(t) + C(t)Y_1'(t), \\ Y_2''(t) &= C''(t)Y_1(t) + 2C'(t)Y_1'(t) + C(t)Y_1''(t). \end{aligned}$$

Jelen esetben $Y_1(t) = t$, így

$$\begin{aligned} Y_2'(t) &= C'(t)t + C(t), \\ Y_2''(t) &= C''(t)t + 2C'(t). \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve a homogén egyenletbe a következőt kapjuk:

$$t^2(C''(t)t + 2C'(t)) - t(t+2)(C'(t)t + C(t)) + (t+2)(C(t)t) = 0 \tag{3}$$

(2) mindkét oldalát $C(t)$-vel szorozva, és kivonva (3)-ból, a következő alakot kapjuk:

$$t^2(C''(t)t + 2C'(t)) - t(t+2)(C'(t)t) = 0$$

$t \neq 0$ esetén:

$$C''(t)t+2C'(t)-(t+2)C'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad tC''(t)-tC'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C''(t)-C'(t) = 0.$$

Ez egy hiányos másodrendű d.e., a tanult módszereket alkalmazva $C(t) = e^t$ adódik, azaz a homogén egyenlet másik fundamentális megoldása $Y_2(t) = te^t$, s így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(t) = C_1 t + C_2 te^t.$$

Másodszor az inhomogén egyenlet megoldását adjuk meg. A partikuláris megoldás megkeresésére a képletgyűjtemény 4. pontjában található **két konstans variációs módszer**t használtuk, mellyel a $-2t^2 - 2t$ partikuláris megoldást kapjuk. Ennek második tagja $(-2t)$ beolvad az általános megoldás $C_1 t$ részébe. (Persze sokféle jó partikuláris megoldás írható ide.) Az inhomogén általános megoldás tehát:

$$y(t) = C_1 t + C_2 te^t - 2t^2.$$