Feladatok az 5. hétre. Eredményekkel és teljesen kidolgozott megoldásokkal az 1 (a)–(e) és a 4. feladatokra

Legyen $ay'' + by' + cy = g(t)$ állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris diff. egyenlet, ahol a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet: $ar^2 + br + c = 0$.

jobboldal - $g(t)$		**próbafüggvény** - $y_{i,p}(t)$
$P_n(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$	$\Rightarrow$	$t^s(A_n t^n + \cdots + A_0)$, ahol s: ahányszoros gyöke a 0 a karakterisztikus egyenletnek
$P_n(t)e^{ut}$	$\Rightarrow$	$t^s(A_n t^n + \cdots + A_0)e^{ut}$, ahol s: ahányszoros gyöke u a karakterisztikus egyenletnek
$P_n(t)e^{ut}\begin{cases}\sin vt\\ \cos vt\end{cases}$	$\Rightarrow$	$t^s e^{ut}[(A_n t^n + \cdots + A_0)\cos vt +$ $+(B_n t^n + \cdots + B_0)\sin vt]$, ahol s: ahányszoros gyöke $u + iv$ a karakterisztikus egyenletnek

1. táblázat. Segédanyag próbafüggvényekhez

1. Határozzuk meg következő differenciálegyenletek általános megoldását a próbafüggvény-módszerrel.

   (a) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2t}$

   (b) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$

   (c) $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$

   (d) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2t} + 2\sin t - 8t\cos(2t)$

   (e) $y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{e}^{-t}$

2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3\mathrm{e}^{2t}$

   (b) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2t)$

   (c) $y'' - 2y' - 3y = -3t\mathrm{e}^{-t}$

   (d) $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-t}$

3. Határozzuk meg a kezdetiérték probléma megoldását:

$$y'' + 4y = t^2 + 3t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + 4y = 3\csc t, \qquad (\csc t = 1/\sin t)$$

5. Határozzuk meg az alábbi két differenciálegyenlet megoldását a konstansvariációs módszerrel majd a próbafüggvény-módszerrel is:

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^t$.

   (b) $4y'' - 4y' + y = 16\mathrm{e}^{t/2}$.

6. Határozzuk mega következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y = \tan t, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Eredmények

1. Mivel

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p}, \tag{1}$$

ezért először a homogén részt oldjuk meg:

$$Y'' - 3Y' - 4Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 3r - 4 = 0$. Ennek gyökei:

$$r_1 = -1, \qquad r_2 = 4. \tag{2}$$

Az általános megoldás.

$$Y_{h,alt} = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a baloldal és így a homogén rész általános megoldása közös a következő 5 feladatban.

(a) Mivel 2 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek ezért az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldást

$$y = c \cdot \mathrm{e}^{2t}$$

alakban keressük. A c konstans meghatározásához az $y = c \cdot \mathrm{e}^{2t}$ függvényt vissza helyettesítjük az $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2t}$ egyenletbe. Ehhez először kiszámoljuk:

$$y' = 2c\mathrm{e}^{2t}, \qquad y'' = 4c\mathrm{e}^{2t}.$$

Visszahelyettesítés után kapjuk:

$$(4c - 3 \cdot 2c - 4 \cdot c) \cdot \mathrm{e}^{2t} = 3\mathrm{e}^{2t}.$$

Innen $c = -1/2$. Vagyis

$$y = y_{i,p} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$$

Ez és (3) együttesen azt adja, hogy

$$y_{i,alt} = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$$

(b) Csak az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldást meghatározása van hátra, hiszen az $Y_{h,alt}$ megoldást már előbb meghatároztuk. Az $y = y_{i,p}$ megoldást keressük

$$y = A\cos t + B\sin t$$

alakban. Vagyis meg kell határozni az A és B konstansokat úgy, hogy $y = A\cos t + B\sin t$ egy megoldása legyen az

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t. \tag{4}$$

egyenletnek. Ehhez kiszámoljuk az $y = A\cos t + B\sin t$ első és második deriváltját:

$$y' = -A\sin t + B\cos t, \qquad y'' = -A\cos t - B\sin t.$$

A (4) egyenletbe való vissza helyettesítés után:

$$(-5A - 3B)\cos t + (3A - 5B)\sin t = 2\sin t.$$

A $\cos t$ és a $\sin t$ együtthatói mindkét oldalon meg kell, hogy egyezzenek:

$$\begin{aligned} -5A - 3B &= 0 \\ 3A - 5B &= 2. \end{aligned}$$

Tehát: $A = 3/17$ és $B = -5/17$. Ezért

$$y_{i,p} = \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t.$$

Ez, (1) és (3) együttesen adja, hogy

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{\frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t}_{y_{i,p}}.$$

(c) Meg kell határoznunk az A, B, C, D konstansokat úgy, hogy $y_{i,p} = (A+Bt)\cos(2t) + (C+Dt)\sin(2t)$ az $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$ differenciálegyenlet egy megoldása legyen:

$$\begin{aligned} y' &= B\cos(2t) + 2(C+Dt)\cos(2t) + D\sin(2t) - 2(A+Bt)\sin(2t), \\ y'' &= 4D\cos(2t) - 4(A+Bt)\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 4(C+Dt)\sin(2t). \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve az $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$ egyenletbe összevonás után ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} -(8A + 3B + 6C - 4D + 8Bt + 6Dt)\cos(2t) &\;+ \\ +(6A - 4B - 8C - 3D + 6Bt - 8Dt)\sin(2t) &= -8t\cos(2t) \end{aligned}$$

Mivel $\cos(2t)$ és $\sin(2t)$ lineárisan függetlenek, ezért az együtthatók mindkét oldalt megegyeznek:

$$\begin{aligned} -(8A + 3B + 6C - 4D) - (8B + 6D)t &= -8t \\ +(6A - 4B - 8C - 3D) + (6B - 8D)t &= 0 \end{aligned}$$

Mivel t és 1 is lineárisan független, ezért itt is felírhatjuk az összefüggéseket az együtthatókra:

$$\begin{array}{lccccccccc} (i) & 8A & + & 3B & + & 6C & - & 4D & = & 0 \\ (ii) & & & 8B & & & + & 6D & = & -8 \\ (iii) & 6A & - & 4B & - & 8C & - & 3D & = & 0 \\ (iv) & & & 6B & & & - & 8D & = & 0 \end{array}$$

Osszuk el a (ii) és (iv) egyenletek mindkét oldalát 2-vel, majd hajtsuk végre a $(i) - (iv)$ ill. $(iii) + (ii)$ transzformációkat! Ezután a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{lccccccccc} (i) & 4A & & & + & 3C & - & & = & 0 \\ (ii) & & & 4B & & & + & 3D & = & -4 \\ (iii) & 3A & & & - & 4C & & & = & -2 \\ (iv) & & & 3B & & & - & 4D & = & 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer tehát 2 kétismeretlenes egyenletrendszerré bomlik fel. Az egyenletrendszer megoldása:

$$A = -\frac{6}{25}, \qquad B = -\frac{16}{25}, \qquad C = \frac{8}{25}, \qquad D = -\frac{12}{25}$$

Így a d.e. általános megoldása:

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{\frac{1}{25}\left[(-6-16t)\cos(2t) + (8-12t)\sin(2t)\right]}_{y_{i,p}}$$

(d) Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldala az előző három egyenlet jobb oldalainak az összege. Használva, hogy az egyenletünk **lineáris** ez azt jelenti, hogy az előző három egyenlet partikuláris megoldásainak összegeként kapjuk ezen egyenlet egy partikuláris megoldását:

$$y_{i,p} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}\mathrm{e}^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}\mathrm{e}^{t}\sin(2t)$$

Tehát az általános megoldás:

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{1}{25}\left[(-6-16t)\cos(2t) + (8-12t)\sin(2t)\right]}_{y_{i,p}}$$

(e) Használva (2)-t látjuk, hogy a -1 egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak. Ezért egy partikuláris megoldást

$$y = t^1 Ae^{-t} = At\mathrm{e}^{-t}$$

alakban keresünk. A deriváltak:

$$y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \qquad y'' = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

Ezeket behelyettesítve a kezdeti $y'' - 3y' - 4y = -2e^{-t}$ egyenletbe összevonás után:

$$-5Ae^{-t}$$

Az együtthatók közti összefüggésből:

$$-5A = 2, \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{5}$$

Tehát a partikuláris megoldás $y_{i,p} = -\frac{2}{5}t\mathrm{e}^{-t}$, az általános megoldás pedig

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{-\frac{2}{5}t\mathrm{e}^{-t}}_{y_{i,p}}$$

2. (a) $y = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}$

(b) $y = c_1 \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + c_2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t)$

(c) $y = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{16}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{8}t^2\mathrm{e}^{-t}$

(d) $y = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t} + t^2\mathrm{e}^{-t}$.

3. $y = \frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{5}{8}\sin(2t) + \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$

4. Az általános megoldást a

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p} \tag{5}$$

formula adja mivel az egyenlet lineáris. Az egyenlet homogén része:

$$Y'' + 4Y = 0.$$

Ennek karakterisztikus polinomja $r^2 + 4r = 0$. A karakterisztikus polinom gyökei:

$$r_1 = 2i, \qquad r_2 = -2i.$$

A homogén rész általános megoldása:

$$Y_{h,alt} = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t). \tag{6}$$

Az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldás meghatározásához a konstans variációs módszert kell használnunk. Vagyis meg kell határozni azon $c_1(t), c_2(t)$ konstansokat, melyekre:

$$y = c_1(t)\cos(2t) + c_2(t)\sin(2t) \tag{7}$$

egy megoldása az $y''+4y = 3\csc t$ egyenletnek. Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t) &= 0 \\ -2c_1'(t)\sin(2t) + 2c_2'(t)\cos(2t) &= 3\csc t. \end{aligned}$$

Az első egyenletből adódik, hogy

$$c_2'(t) = -c_1'(t)\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}.$$

Ezt a második egyenletbe vissza helyettesítve:

$$c_1'(t) = -\frac{3\csc t\sin(2t)}{2} = -3\cos t.$$

Ezt az utolsó előtti egyenletbe vissza írva:

$$c_2'(t) = \frac{3}{2}\csc t - 3\sin t.$$

Integrálás után kapjuk:

$$c_1(t) = -3\sin(t),\ c_2(t) = -\frac{3}{2}\ln|\csc t + \cot t| + 3\cos t = \frac{3}{2}\ln|\tan\frac{t}{2}| + 3\cos t.$$

(Az integráláskor adódó konstansokat elhagyjuk mert csak egyetlen partikuláris megoldásra van szükségünk.) Ezért

$$y = y_{i,p} = (-3\sin(t))\cdot\cos(2t) + (-\frac{3}{2}\ln|\csc t + \cot t| + 3\cos t)\cdot\sin(2t).$$

Használva az (5) és a (6) formulákat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_{i,alt} &= c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ &+ (-3\sin(t))\cdot\cos(2t) + (-\frac{3}{2}\ln|\csc t + \cot t| + 3\cos t)\cdot\sin(2t). \end{aligned}$$

5. (a) $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + e^t$.
   (b) $y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2} + 2t^2 e^{t/2}$.
6. $y = c_1\cos t + c_2\sin t - (\cos t)\ln(\tan t + \sec t)$.