·

æ

A3 6-7. GYAKORLAT (* feladatok nem kötelezőek)

1. Az 1,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető?
2. A 0,2,4,5,7 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 5-jegyű szám készíthető? Ezekből hány páros, és hány páratlan?
3. Az 1,1,4,4,4,5 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány különböző 6-jegyű szám készíthető?
4. A KOMBINATORIKA szó betűinek összekeverésével hány különböző 13 betűs (értelmes vagy értelmetlen) szó készíthető?
5. Az 1,2,4,5,7 számkártyákból hány különböző
   a. olyan 3-jegyű szám készíthető, melyeknek számjegyei egymás közt is kölönböznek?
   b. 3-jegyű szám készíthető?
   c. 5-jegyű szám készíthető?
   d. 7-jegyű szám készíthető?
6. Hány különböző olyan rendszámtábla készíthető az abc 26 betűjének és a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyeknek tetszőleges felhasználásával, amelyben
   a. 3 betűt 3 számjegy követ?
   b. 2 betűt 4 számjegy követ?
   c. Melyik szisztémában van több lehetőség? Hányszor több?
7. Hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény?
8. Egy 20-fős tankörben
   a. mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez?
   b. tanulmányi, kulturális és sportfelelőst választanak (ezek különböző személyek). Hányféle választás lehetséges?
   b. 3 személyt delegálnak a hallgató önkormányzat gyűlésére. Hányféle választás lehetséges?
9. Hány olyan 3-jegyű szám van, melynek jegyei
   a. csökkenő sorrendben követik egymást?
   b. (*) növekvő sorrendben követik egymást?
10. Hányféleképpen tölthető ki egy lottőszelvény? (*) Adjon algoritmust a különböző számötösök felsorolására!
11. Hányféleképpen lyukasztható ki egy buszjegy, ha
   a. 3 lyukat ejt a lyukasztó?
   b. ha tetszőleges (min. 1 és max. 9 számú) lyukat ejt a lyukasztó?

12. Cukrászdában 10 különböző fajta torta van. Hányféleképpen választhatunk
    a. 3 szelet tortát különböző fajtákból?
    b. (*) 3 szelet tortát?
    c. (*) 20 szelet tortát?
13. Egy 20-fős tankör (10 fiú, 10 lány) kirándulni megy a János-hegyre. Hányféleképpen
    a. alakíthatnak párokat, mikor felszállnak a libegőre?
    b. alakíthatnak (fiú–lány) táncospárokat, ha a fenti étteremben mindenki táncol?
    c. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha 5 erdei asztalhoz leülnek ennivalójukat elfogyasztani?
    d. alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha az 5 csoport különféle feladatköröket lát el (egyik rőzsét hord, a másik tüzet gyújt, a harmadik főz, stb.).
14. Hányféleképpen olvasható ki a BELFEGOR szó az alábbi elrendezésből, ha a bal felső sarokból a jobb alsó felé haladunk (jobbra vagy lefelé)?

B	E	L	F	E
E	L	F	E	G
L	F	E	G	O
F	E	G	O	R

15. Az előbbi feladat alapján: Pascal háromszög, binomiális együtthatók képzési szabálya. Binomiális tétel és az alábbi összefüggések kombinatorikus bizonyítása:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \binom{m}{k-i}$$

16. Egy vetélkedőn 4 informatikus, 5 villamos-, 6 építő- és 7 gépészkaros hallgató vesz részt. Egyik feladat megoldásához hányféleképpen lehet közülük 5 személyt kiválasztani úgy, hogy mind a négy kar képviselve legyen közöttük?
17. (*) Egy DNS-részlet 20 hosszúságú, A,T,C,G jelekből álló sorozat. Hány különböző olyan sorozat létezik, amelyben a négyféle jel mindegyike szerepel legalább egyszer? (Ekvivalens feladat: 20 fős tankör minden tagja egy gombócot eszik A,T,C,G

fagyik közül. Hányféleképpen fagyizhatnak, ha mind a négy ízből legalább egy-valaki eszik?)

Megoldások:

1. Mivel mind az 5 kártyát fel akarjuk használni, ezért az első helyre 5 szám kerülhet, a második helyre már csak 4, és így tovább, az 5-jegyű szám legalsó helyiértékére már csak 1 kártya közül "választhatunk". Azaz:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

2. A 0-s kártya nem kerülhet a legmagasabb helyiértékre, így oda csak 4 szám közül választhatunk, a többi 4 helyiértékre kerülő számokat viszont ezután is 4! féleképpen tudjuk kiválasztani:

$$4 \cdot 4!$$

Páratlan: Vagy 5-össel, vagy 7-essel kell végződnie, mindkét esetben 3 * 3! féleképpen helyezhetjük el a többi 4-et, így a páratlanok száma:

$$2 \cdot 3 \cdot 3!$$

Páros: Komplementer eseménye a páratlan számoknak:

$$4 \cdot 4! - 2 \cdot 3 \cdot 3!$$

3. 6 különböző szám esetén az 1. feladat alapján 6! lenne, azonban a többször előforduló számokat(1-es, 4-es), amelyek n-szer fordulnak elő, n! féleképpen tudjuk úgy cserélgetni, hogy ugyanazt a számot kapjuk, azaz 2!-al illetve 3!-al le kell osztani:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

4. Az előző feladat analógiájára (K,O,I,A betűk kétszer-kétszer fordulnak elő):

$$\frac{13!}{2^4}$$

5.

a. 5 számjegyből választhatunk 3 helyre, egyik sem szerepelhet benne többször, ezért: $5 \cdot 4 \cdot 3$

b. Ha ismétlődhetnek a számok akkor mindhárom helyiértékre 5 számjegyből választhatunk: 5^3

c. A b feladat analógiájára: 5^5

d. Szintén a fentiek miatt: 5^7

6.

a. A 3 betűs helyre $26 \cdot 26 \cdot 26$ kombináció, a 3 számos helyre $10 \cdot 10 \cdot 10$ db különböző szám kerülhet: $26^3 \cdot 10^3$

b. Fentiek alapján: $26^2 \cdot 10^4$

c. Az első esetben több lehetőség van, egész pontosan a-ban 2.6-szor több, mint b-ben

7. A totószelvényen 13 esemény 3 féle kimenetelére tippelhetünk, azaz minden sort 3 féleképp tölthetünk ki: $\mathbf{3^{13}}$

8.

a. Mind a 20 ember 19 másikkal fog kezet, viszont $20 \cdot 19$ esetén minden kézfogást kétszer számolnánk, ezért még kell egy $\frac{1}{2}$ -es szorzó:

$$\frac{20 \cdot 19}{2}$$

b. Különböző személyek, így az 1. posztra még 20 emberből, a másodikra 19-ből az utolsóra pedig 18 személyből lehet választani:

$$20 \cdot 19 \cdot 18$$

c. 20 emberből 3-at kiválasztani definíció alapján $\binom{20}{3}$ -képpen lehet

9.

a. A 10 számjegyből 3-at kiválasztani $\binom{10}{3}$ módon tudok, ezeket a számharmasokat csökkenő sorba rendezni pedig hármasonként csak 1 féleképp lehet, így:

$$\binom{10}{3}$$

b. Az a feladathoz hasonlóan itt is 3 számot kell kiválasztanunk, azonban ebben a 0 nem szerepelhet, mivel növekvő sorrend esetén a legmagasabb helyiértéken kéne szerepelnie, 0-val viszont nem kezdődhet szám, így marad 9 számjegy:

$$\binom{9}{3}$$

10. A 90 számból 5-öt $\binom{\mathbf{90}}{\mathbf{5}}$ módon lehet kiválasztani.

11.

a. A 9 helyből 3 különbözőt a lyukasztó $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$ – **képpen** tud kilyukasztani

b. Ha k 1 és 9 közt változik akkor:

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} = 2^9 - 1$$

12.

a. 10 fajta tortából 3 különböző darabot $\binom{10}{3}$ – képpen lehet kiválasztani

b. 10 elem 3-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$$

c. 10 elem 20-ad osztályú ismétléses kombinációi:

$$\binom{10+20-1}{20} = \binom{29}{20}$$

13.

a. Mivel mindenki mindenkivel alakíthat part, ezért az első párt $\binom{20}{2}$ – féleképp választhatjuk ki, a másodikat $\binom{18}{2}$, stb. Így: $\binom{20}{2}\binom{18}{2}$ ... $\binom{4}{2}$, amit még osztanunk kell 10!-al, ha a párok sorrendje nem számít.

b. Az első fiú még 10 lányból tud választani párt, a második 9-ből, stb. Ezért a lehetséges párok száma: 10!

c. Az 1. csoportot $\binom{20}{4}$– féleképp tudjuk kiválasztani, a másodikat $\binom{18}{4}$ módon, stb. Mivel a csoportok sorrendje nem számít, osztunk 5!-al:

$$\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\frac{1}{5!}$$

d. Hasonló, mint a c feladat, csak a sorrend is számít:

$$\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$$

14. 3 lefele lépést és 4 jobbra lépést tetszőleges sorrendben tehetünk meg, azaz az összesen 7 lépésből válasszuk ki, hogy melyik 3-nál lépünk lefele (vagy melyik 4-nél lépünk jobbra, ezek egyenértékűek). Ezt $\binom{7}{3}$ módon tehetjük meg.

16. 5 hely van, és mind a 4 kar képviselve kell legyen, így valamelyik karból 2 ember lesz. Ezek egymástól független lehetőségek, így külön-külön összeadódnak:

$$\binom{4}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\binom{5}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot 7+\binom{6}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot 7+\binom{7}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

17. Összesen 4^{20} sorozat létezik amit az A,T,C,G betűkből 20 hosszan tudunk kitenni, ebből azonban le kell vonni azokat az eseteket amikor csak 4 betűt használtunk, ez $\binom{4}{1}\cdot 3^{20}$. Ekkor viszont levontuk a 2 betűs sorozatokat is, ezeket hozzá kell adnunk: $\binom{4}{2}\cdot 2^{20}$. Értelemszerűen ebben benne vannak az 1 betűből álló 20 hosszú sorozatok, ezeket ismét le kell vonni: $\binom{4}{3}\cdot 1^{20}$. Így a teljes lehetséges sorozatok száma:

$$4^{20}-\binom{4}{1}\cdot 3^{20}+\binom{4}{1}\cdot 2^{20}-\binom{4}{1}\cdot 1^{20}$$