Feladatok és megoldások a 8. hétre

Építőkari Matematika A3

1. Tegyük fel, hogy A és B egymást kölcsönösen kizáró események, melyekre $\mathbb{P}\{A\} = 0.3$ és $\mathbb{P}\{B\} = 0.5$. Mi a valószínűsége, hogy

   (a) A vagy B bekövetkezik;

   (b) A bekövetkezik, de B nem következik be;

   (c) A és B is bekövetkezik?

2. A férfiak 28%-a cigarettázik, 7%-a szivarozik, 5%-a pedig cigarettázik és szivarozik is.

   (a) Hány százalékuk nem cigarettázik és nem is szivarozik?

   (b) Hány százalékuk szivarozik, de nem cigarettázik?

3. Egy kis közösség 20 családból áll. 4 családban egy gyermek van, 8 családban két gyermek van, 5 családban három, 2 családban négy, 1 családban pedig öt gyermek található.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott családban i gyermek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott gyermek i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

4. Feldobunk egy érmét kétszer egymás után. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy *pontosan* 1 db fejet dobunk?

5. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

6. Két szabályos kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a második kockával nagyobbat dobunk, mint az elsővel?

7. Mindkét szabályos kockánknak két piros, két fekete, egy sárga, és egy fehér oldala van. Ezzel a két kockával dobva mi a valószínűsége, hogy egyforma színű oldaluk lesz fölül?

8. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek? (Feltesszük, hogy a gyermekek egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel lesznek fiúk és lányok.)

9. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

10. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

11. Öt ember, A, B, C, D, E, véletlenszerűen sorba áll. Mi a valószínűsége, hogy

    (a) pontosan egy ember van A és B között;

    (b) pontosan két ember van A és B között;

    (c) pontosan három ember van A és B között?

12. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős hallgatóságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik? (Feltesszük, hogy a születésnapok egymástól függetlenül egyenlő valószínűséggel oszlanak el az év 365 napja között. Ne foglalkozzunk a szökőévekkel.)

13. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan két találatunk lesz?

14. Egy erdőben 20 őz él, melyekbol 5-öt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedtek. Később ebből a 20 őzből 4-et befogunk. Mi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan 2 van megjelölve? Milyen feltevésekkel élünk?

15. Egy konferencián 30 pszichiáter és 24 pszichológus vesz részt. Az 54 résztvevőből hármat véletlenszerűen kiválasztanak, akik egy fórumon vesznek részt. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pszichológus lesz köztük?

Eredmények

1. (a) $\mathbb{P}\{A \cup B\} = 0.3 + 0.5 = 0.8$.

    (b) $\mathbb{P}\{A \cap B^c\} = \mathbb{P}\{A\} = 0.3$.

    (c) $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$.

2. Legyen E az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi cigarettázik, és F az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi szivarozik.

    (a) $\mathbb{P}\{E^c \cap F^c\} = 1 - \mathbb{P}\{E \cup F\} = 1 - \mathbb{P}\{E\} - \mathbb{P}\{F\} + \mathbb{P}\{E \cap F\} = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = 0.7$ vagy 70%.

    (b) $\mathbb{P}\{F \cap E^c\} = \mathbb{P}\{F - E\} = \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{F \cap E\} = 0.07 - 0.05 = 0.02$ vagy 2%.

3. (a) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{2}{20}, \frac{1}{20}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

(b) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{48}, \frac{16}{48}, \frac{15}{48}, \frac{8}{48}, \frac{5}{48}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

4. Legalább egy dobásunk fej akkor és csak akkor, ha nem mindkét dobásunk írás. A valószínűség tehát 3/4. Pontosan egy fej kétféleképpen fordulhat elő ((**H, T**) és (**T,H**)) a négy lehetőségből, így a valószínűség 1/2.

5. Legalább egy hatost dobunk, hogy ha nem igaz az, hogy mindkét dobásunk nem 6-os. A válasz tehát $1 - (5/6)^2$. Nem dobunk egy 6-ost sem $(5/6)^2$ valószínűséggel.

6. *1. megoldás*: Az az E esemény, hogy a második kockával nagyobbat dobunk mint az elsővel a következő elemi eseményekből áll:

$$
\begin{array}{rlllll}
E = \{ & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
 & & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
 & & & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
 & & & & (4,5), & (4,6), \\
 & & & & & (5,6)\}.
\end{array}
$$

Ezért $\#E = 15$, míg az eseménytér számossága $\#S = 36$, így a valószínűség 15/36 = 5/12.

2. megoldás: Az E esemény olyan számpárokból áll, melyeknek a második tagja nagyobb, mint az első tagja. Minden ilyen pár előáll az $\{1, 2, ..., 6\}$ számok 2-kombinációjából, ha a kiválasztott két számot növekvő sorrendbe állítjuk. Ezért $\#E = \binom{6}{2} = 15$, és $\mathbb{P}\{E\} = 15/36 = 5/12$.

3. megoldás: Definiáljuk az F-et mint azt az eseményt, hogy az első kockával nagyobbat dobunk, mint a másodikkal. Szimmetriaokokból $\mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{F\}$, és $(E \cup F)^c$ az az esemény, hogy a két kockával egyformát dobtunk, melynek az esélye 1/6. Ezért $5/6 = \mathbb{P}\{E \cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{E \cap F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{E\} - 0 = 2\mathbb{P}\{E\}$, melyből $\mathbb{P}\{E\} = 5/12$.

7. Mind a két kockának a piros oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, mindkettőnek a fekete oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, a sárga oldalak lesznek fölül 1 esetben, és a fehér oldalak lesznek fölül 1 esetben. Ez összesen 10 eset a 36 egyenlő valószínűségű kimenetelből, tehát a valószínűség $10/36 = 5/18$.

8. A gyerekek nemét tekintve 8 egyenlő valószínűségű kimenetel van. Ezek közül két esetben lesz a három gyermek egynemű, a válasz tehát $2/8 = 1/4$.

9. Annak valószínűsége, hogy legalább egy fejet dobunk n dobásból $1 - (1/2)^n$. Ezért

keressük n-et, melyre

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq 0.9 \\ 0.1 &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \log_2(0.1) &\geq -n \\ \log_2(10) &\leq n. \end{aligned}$$

Mivel n egész, a válasz az, hogy legalább $\lceil \log_2(10) \rceil = 4$ dobásra van szükség. (Itt $\lceil x \rceil$ a felsőegészrészt jelöli, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely x-nél nagyobb vagy vele egyenlő.)

10. Azon esetek száma melyekben mind a hat szám előjön megegyezik e hat szám permutációinak számával, azaz 6!-sal. Az eseménytér a hat számjegyből felírható bármilyen, hat hosszúságú sorozatok halmaza, ezért $\#S = 6^6$. A keresett valószínűség tehát $6!/6^6 = 5!/6^5 \simeq 0.015$.

11. *megoldás sorrenddel*:

    (a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötbol azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Ha ezt megtettük, A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra. Ekkor három üres helyünk marad, melyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk C-t, D,-t és E-t. Ezért $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ sorrend van úgy, hogy pontosan egy személy kerül A és B közé. Mivel mind az $5! = 120$ sorrend egyformán valószínű, a válasz $36/120 = 3/10$.

    (b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, azután A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba C-t, D,-t és E-t. Ezért $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül A és B közé, a válasz $24/120 = 1/5$.

    (c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, azután A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba C-t, D,-t és E-t. Ezért $1 \cdot 2 \cdot 3! = 12$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül A és B közé, a válasz $12/120 = 1/10$.

    megoldás sorrend nélkül:

    (a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötből azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Mivel e két pozícióra nézve mind az $\binom{5}{2}$ lehetőség egyenlő valószínű, a válasz $3/\binom{5}{2} = 3/10$.

(b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, a válasz most $2/\binom{5}{2} = 1/5$.

(c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, a válasz most $1/\binom{5}{2} = 1/10$ lesz.

12. $365 \cdot 364 \cdots 336 = 365!/(365-30)!$ féleképpen oszthatunk ki 30 különböző születésnapot a hallgatóknak, míg 36530-féleképpen oszthatunk ki 30 tetszőleges születésnapot a hallgatóknak. Ezért a keresett valószínűség $365!/[335! \cdot 36530] \simeq 0.29$.

13. Annyiféleképpen lehet kettesünk, ahányféleképpen kiválasztható az öt nyerőszámból kett, és a 85 nem nyerő számból három. Ezért $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$ féle kéttalálatos szelvény van, összesen $\binom{90}{5}$ különböző szelvény közül. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} / \binom{90}{5} \simeq 0.022$.

14. Ahhoz, hogy 2 megjelölt és 2 nem megjelölt őzet fogjunk, 2-t kell kiválasztanunk az 5 megjelölt őzből, és 2-t a 15 nem megjelölt őzből. Ezt $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}$ féleképpen tehetjük meg, míg $\binom{20}{4}$ féleképpen választható ki tetszoleges 4 őz. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2} / \binom{20}{4} \simeq 0.22$.

    A kérdést máshogy is megtámadhatjuk, ha az idő visszafordításával azt kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az általunk fogott 4-ből kettő, és az általunk nem megfogott 16-ból három őz van megjelölve. Ekkor a válasz $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{3} / \binom{20}{5}$. A binomiálisok határozott kérésre bevallják, hogy a két válasz tulajdonképpen megegyezik.

15. Ha elosztjuk, hogy hányféleképpen választható a 30-ból 3 pszichiáter a fórumba azzal, ahányféleképpen az 54 résztvevőből választható 3 ember a fórumba, akkor megkapjuk annak a valószínűségét, hogy a fórumba nem választanak pszichológust: $\binom{30}{3} / \binom{54}{3}$. A válaszunk ezen esemény komplementumának valószínűsége, azaz $1 - \binom{30}{3} / \binom{54}{3} \simeq 0.84$.