

Matematika A3

Valószínűségszámítás, 0. és 1. gyakorlat

2013/14. tavaszi félév

1. Kombinatorikus módszer

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha k_1, k_2, \dots, k_r db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l -et, ennyiféleképpen tehetjük meg

FELADATOK:

- A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
- Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
- Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
- Egy fagyizóban 5 féle fagyalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?
- Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
- 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
- Egy számkombinációs zárát 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?
- Hányféleképpen tölthető ki egy TOTÓ-szelvény? És egy 5-ös LOTTÓ-szelvény?
- Egy 30 fős tankörben
 - mindenki mindenkivel kezét fog. Hány kézfogás ez?
 - tanulmányi, kulturális és sportfelelőst választanak (ezek különböző személyek). Hányféle választás lehetséges?

- (c) 3 személyt delegálnak a hallgatói önkormányzat gyűlésére. Hányféle választás lehetséges?
10. Hány olyan 4-jegyű szám van, melynek jegyei
- (a) csökkenő sorrendben követik egymást?
 - (b) növekvő sorrendben követik egymást?
11. Hányféleképpen lyukasztható ki egy buszjegy, ha
- (a) 3 lyukat ejt a lyukasztó?
 - (b) ha tetszőleges (min. 1 és max. 9) számú lyukat ejt a lyukasztó?
12. Cukrászdában 10 különböző fajta torta van. Hányféleképpen választhatunk
- (a) 3 szelet tortát különböző fajtákból?
 - (b) 3 szelet tortát?
 - (c) 20 szelet tortát?
13. Egy 20-fős tankör (10 fiú, 10 lány) kirándulni megy a János-hegyre. Hányféleképpen
- (a) alakíthatnak párokat, mikor felszállnak a libegőre?
 - (b) alakíthatnak (fiú-lány) táncos párokat, ha a fenti étteremben mindenki táncol?
 - (c) alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha 5 erdei asztalhoz ülnek le ebédelni?
 - (d) alakíthatnak 4 fős csoportokat, ha az 5 csoport különféle feladatokat lát el (az egyik rőszét hord, a másik tüzet gyújt, a harmadik főz stb.)?
14. 12 könyvből 5 matematikával, 2 statikával, 3 dinamikával és 2 mechanikával foglalkozik. A 12 könyvet úgy szeretnénk a könyvespolcon elhelyezni, hogy az azonos témájú könyvek egymás mellé kerüljenek. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
15. 5 nőből és 9 férfiből olyan bizottságot akarnak létrehozni, amelyben 3 nő és 4 férfi van. Hány bizottság hozható létre, ha a 9 férfiből van 2 olyan, aki nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

2. Lehetséges kimenetek

Az alábbi véletlen jelenségek megnevezett megfigyelésével kapcsolatban adjuk meg az eseményteret, azaz soroljuk fel a lehetséges kimeneteket (más néven: elemi eseményeket). Minden esetben állapítsuk meg, hogy hány elemű az eseménytér.

FELADATOK:

16. (a) Egy szabályos érmével dobunk, és megfigyeljük, hogy melyik oldal van felül.
(b) Két szabályos érmével dobunk,
(c) Három szabályos érmével dobunk,
(d) Négy szabályos érmével dobunk,
(e) Öt szabályos érmével dobunk,
(f) Tíz szabályos érmével dobunk,
és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül.

17. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
 (b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
 (c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,
 és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
18. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
 (b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
 (c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,
 és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk írást.
19. (a) Egy szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük, hogy melyik szám van felül.
 (b) Két szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
 (c) Három szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
 (d) Négy szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
 (e) Öt szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
 és megfigyeljük mindegyik kockán, hogy melyik szám van felül.
20. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
 (b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
 (c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
 és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
21. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
 (b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
 (c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
 és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk hattól különböző számot.

3. Valószínűség

A valószínűségszámítás legegyszerűbb modellje az, amikor véges sok, egyformán valószínű kimenetel van. Ekkor egy adott A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{az eseményre nézve kedvező kimenetek száma}}{\text{az összes kimenetek száma}}$$

FELADATOK:

22. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?
23. Egy csomag magyar kártyából kivesszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?
24. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?
25. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

26. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?
27. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?
28. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?
29. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találmra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?
30. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?
31. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?
32. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?
33. Mi a valószínűbb: 6 kockadobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 kockadobásból legalább 2-szer hatost dobni?
34. Két szabályos kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a második kockával nagyobbat dobunk, mint az elsővel?
35. Egy erdőben 20 őz él, melyekből 5-öt befogtak és megjelöltek és visszaengedtek. Később ebből a 20 őzből 4-et befogunk. Mi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan kettő van megjelölve?

4. Valószínűségi változó és az ő eloszlása

Amikor a megfigyelés eredményei, vagyis a lehetséges kimenetek számok, akkor azt mondjuk, hogy valószínűségi változóval van dolgunk. Ha a valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.) akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a valószínűségi változó eloszlását. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását:

FELADATOK:

36. (a) Egy szabályos érmével dobunk,
 (b) Két szabályos érmével dobunk,
 (c) Három szabályos érmével dobunk,
 (d) Négy szabályos érmével dobunk,
 és megfigyeljük hány fejet kapunk.
37. Két szabályos dobókockával dobunk,
 (a) és megfigyeljük a dobott számok összegét.
 (b) és megfigyeljük a dobott számok különbségét.
 (c) és megfigyeljük a dobott számok minimumát.
 (d) és megfigyeljük a dobott számok maximumát.

38. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,
és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
39. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
40. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
(b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
(c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,
és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk hattól különböző számot.