Matematika A3
Valószínűségszámítás, 2. gyakorlat
2013/14. tavaszi félév

1. Feltételes valószínűség

Fontos lehet számunkra egy B esemény bekövetkezésének esélyének ismerete, amikor tudjuk, hogy egy másik A esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám nekem jól bejött, és most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálatom valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt.

A feltételes valószínűség jelölése: $P(B|A)$. Olvasva: B valószínűsége feltéve, hogy A bekövetkezik. Számítása:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Vegyük észre, hogy az alábbi ún. szorzási szabály fennáll:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

FELADATOK:

1. Egy szabályos kockával dobunk. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobtunk,
   (a) ha barátomtól tudom, hogy párosat dobtunk?
   (b) És ha azt tudom, hogy legalább 3-ast dobtunk?
   (c) És ha azt tudom, hogy legfeljebb 5-öst dobtunk?
2. Feldobunk két kockát.
   (a) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk?
   (b) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6?
3. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt vagy fiút. Tekinsünk egy véletlenszerűen választott háromgyerekes családot. Ha megtudjuk, hogy a családban van fiú, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy
   (a) pontosan egy fiú van a családban?
   (b) pontosan két fiú van a családban?
   (c) pontosan három fiú van a családban?
4. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, mind a négy színből öt. Én is és barátom is kap 5 lapot.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

(b) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje, ha nekem 3 zöldem és 2 pirosam van?

5. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	A_1
Lány	40	80	120	A_2
Tanár	10	20	30	A_3
Összesen	100	160	260	
Esemény	B_1	B_2		

(a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? ii) betegé? iii) beteg fiúé?

(b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

(c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

(d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

2. Szorzási szabály

A feltételes valószínűségek szorzási szabálya két, három, négy eseményre így fest:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|A \cap B)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|A \cap B)\ P(D|A \cap B \cap C)$$

A szabály értelemszerűen kiterjeszthető több eseményre is.

FELADATOK:

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat

(a) visszatesszük

(b) nem tesszük vissza?

7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány

(a) átvészeli a teljes eljárást?

(b) az utolsó irtáskor pusztul el?

(c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

8. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?

9. Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy
   (a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?
   (b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!)
   (c) egyik sem húz ilyen tételt?
10. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe.
   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy ezek után az első dobozban 3 piros golyó lesz?
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros és a második kék?
   (c) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros volt, ha a második kék?
11. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe, majd az első dobozból ismét egyet a másikba. Találjon ki olyan kérdéseket, melyek golyók színével kapcsolatosak, és feltételes valószínűségekkel megválaszolhatók!

3. Teljes valószínűség tétele

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként kizáróak és úniójuk a biztos eseményt), B pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

FELADATOK:

12. Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak kb. hány százaléka bukik meg az első vizsgán?
13. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) az első üzletkötés kedvező lesz?
   (b) mindkét üzletkötés javunkra válik?
   (c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?
14. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyeréshez (11-10-nél folytatják két pont különbségig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzjutalmat: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben $10 - 9$-es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztozkodás a pénzen?

4. Bayes-tétel

Ha tudjuk, hogy B bekövetkezett, akkor kérdezhetjük mi annak a valószínűsége, hogy ez az A_i eseménnyel valósult meg? Igaz a következő képlet:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

15. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

    (a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

    (b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

17. Tegyük fel, hogy egy bizonyos betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy vérvizsgálattal lehet kimutatni. A vizsgálat sajnos tévedhet mindkét irányban: beteg emberek esetén csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat betegnek jelzi, egészséges embereket pedig csak 0.8 a valószínűsége, hogy egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég vizsgálták, és a vizsgálat betegnek jelezte. Nyugtassuk meg barátomat, hogy nem kell megijednie: a vizsgálat eredményének ismeretében sem túl valószínű, hogy a kérdéses betegségben szenved.

5. Független események

Az A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Három esemény függetlenségéhez már 8 egyenlőségnek kellé teljesülni:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})$$
$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$
$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$$
$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})$$
$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}1)P(\overline{A_2})P(A_3)$$
$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

Több, mondjuk n, esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n),$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz kell hogy legyen az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \dots \cap A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})\dots P(A_n).$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

FELADATOK:

18. Tegyük fel, hogy az év egy bizonyos napján Budapesten, New York-ban és Tokioban minden nap egymástól függetlenül esik az eső 0.6, 0.8, 0.5 valószínűségekkel, illetve nem esik 0.4, 0.2, 0.5 valószínűségekkel. Esőzés szempontjából a három városban 8 féle variáció lehetséges. Sorolja fel ezt a 8 variációt, és mind a 8 variácónak adja meg a valószínűségét! Ezek után tekintse azt a valószínűségi változót, hogy

$$X = \text{e három város közül hány városban esik az eső.}$$

Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását!

19. *(Az előző feladat folytatása)*
Hogyan egyszerűsödik az előző feladatban a számítás, ha az eső valószínűsége mindhárom városban ugyanannyi. Jelölje ezt a közös valószínűséget p-vel, és adja meg az

$$X = \text{e három város közül hány városban esik az eső}$$

valószínűségi változónak az eloszlását a p paraméter segítségével!

20. *(Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre)*
Egy 10 és egy 20 forintos érmével dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

$$A = \text{10 forintos érme fejet ad,}$$
$$B = \text{10 forintos érme fejet ad,}$$
$$C = \text{mindkét érmével írást dobok vagy mindkét érmével fejet dobok.}$$

A és B nyilván függetlenek egymástól. Mutassuk meg, hogy

(a) A és C függetlenek.

(b) B és C függetlenek.

(c) A és B és C nem függetlenek.

21. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

$$A = \text{a dobott számok összege 7 ,}$$
$$B = \text{legalább az egyik kockán van hatos ,}$$
$$C = \text{mindkét kockával páratlant dobok ,}$$
$$D = \text{a két kockával különböző számokat dobok ,}$$
$$E = \text{a zöld kockával 4-est dobok .}$$

Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

(a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

(b) Kizáróak-e az A és C események?

(c) Mennyi a B esemény valószínűsége?

(d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

(e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

(f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

  i. függetlenek, de nem kizáróak,

  ii. kizáróak, de nem függetlenek.

6. További feladatok

22. Egy pakli francia kártyát (azaz 52 lapot, melyek között összesen 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk ki úgy, hogy mindenki kap 13-13 lapot. Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász? (*Legyen E_i az az esemény, hogy az i-dik játékos pontosan egy ászt kapott. Határozzuk meg a $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$ valószínűséget a szorzási szabály segítségével.*

23. Egy diák három záróvizsgájára készül. Az első júniusban lesz, és ezen 90%-os eséllyel megy át. Ha ezen átment, akkor júliusban próbálhatja meg a második vizsgát, amely 80 % eséllyel lesz sikeres. Ha ezen is átment, akkor szeptemberben megy a harmadik vizsgára, ahol már csak 70% eséllyel megy át. Ellenben ha bármelyik vizsgája sikertelen, akkor csak egy év múlva lehet újra próbálkozni

    (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első évben átmegy mindhárom vizsgán?

    (b) Feltée, hogy nem sikerült az első évben letenni a vizsgákat, mi a valószínűsége, hogy a második vizsgája volt sikertelen?

24. Az A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

    (a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.

    (b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?

    (c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

25. Egy dobozban 4 cédula van, három piros és egy kék. Kihúzunk egy cédulát, majd visszatesszük még három ugyanolyan színűvel együtt. Ezután ismét húzunk egy cédulát. Mi a valószínűsége annak, hogy

    (a) egyforma színű cédulákat húzunk?

    (b) pirosakat húzunk, feltéve, hogy egyforma színű cédulákat húzunk?

26. Első lépés: három tízforintos érmével dobunk, és megnézzük, hány fejet kapunk. Második lépés: ahány fejet kaptunk az első lépésben, annyi húszforintos érmével dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a húszforintos érmékkel pontosan 2 fejet kapunk,

    (a) ha nem tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel mi jött ki?

    (b) ha tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel legalább 2 fejet kaptunk?

27. Két szabályos dobókockával dobunk, és megnézzük a dobott számok különbségét (ami egy 0 és 5 közötti szám). Amennyi a dobott számok különbsége, annyi szabályos érmével dobunk. (Tehát az is lehet, hogy 0 darab érmével dobunk.) Mi a valószínűsége annak, hogy az érmékkel pontosan 4 fejet kapunk,

    (a) ha nem tudjuk, hogy a dobókockákkal mi jött ki a különbségre?

    (b) ha tudjuk, hogy a különbség 5?