Matematika A3
Valószínűségszámítás, 3. és 4. gyakorlat
2013/14. tavaszi félév

1. Várható érték

1. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

   (a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$

   (b) $1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6;$

   (c) $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3;$

   (d) $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6;$

   (e) $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;$

   (f) $11,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13;$

   (g) $21,\ 21,\ 21,\ 22,\ 22,\ 23;$

   (h) $21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 26;$

   (i) $210,\ 220,\ 220,\ 220,\ 220,\ 236;$

   (j) $0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6;$

   (k) $0.1,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6;$

   (l) $5.1,\ 5.2,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6;$

   (m) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6;$

   (n) $-1,\ -2,\ -6,\ -6,\ -6,\ -6;$

   (o) $-1,\ -2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$

   A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X-szel. Adja meg X eloszlását táblázattal, és számolja ki az eloszlás várható értékét! Képzelje el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X-re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

   $$X_1, X_2, \ldots, X_N.$$

   Körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények

   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

   átlaga?

2. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családoknak kb.
   15%-ának nincs gyereke,
   40%-ának 1 gyereke van,
   30%-ának 2 gyereke van,
   10%-ának 3 gyereke van,
   5%-ának pedig 4.
   A 4-nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól. Feltesszük, hogy minden gyerek a többitől függetlenül $0.5 - 0.5$ valószínűségggel születik lánynak vagy fiúnak.

   (a) Átlagosan hány gyerek van egy-egy családban?
   (b) Átlagosan hány lány-gyerek van egy-egy családban?
   (c) Átlagosan hány fiú-gyerek van egy-egy családban?
   (d) Ha egy családról annyit tudunk, hogy van benne gyerek, akkor a gyerekek számának mi az eloszlása?

2. Valószínűségi változó függvényének várható értéke, szórás

3. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

   (a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$
   (b) $1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6;$
   (c) $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3;$
   (d) $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6;$
   (e) $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;$
   (f) $11,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13;$
   (g) $21,\ 21,\ 21,\ 22,\ 22,\ 23;$
   (h) $21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 26;$
   (i) $210,\ 220,\ 220,\ 220,\ 220,\ 236;$
   (j) $0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6;$
   (k) $0.1,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6;$
   (l) $5.1,\ 5.2,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6;$
   (m) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6;$
   (n) $-1,\ -2,\ -6,\ -6,\ -6,\ -6;$
   (o) $-1,\ -2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$

   A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X-szel. Képzelje el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X-re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

   $$X_1, X_2, \dots, X_N$$

   - Becsülje meg,hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

     $$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

     kifejezés értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számok második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek kell meghatározni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) második momentumának nevezzük.)

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 2.8-től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 2.8)^2 + (X_2 - 2.8)^2 + \ldots + (X_N - 2.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 2.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) 2.8-re vonatkozó második momentumának nevezzük.)

- Becsülje meg,hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változónak a várható értékre vonatkozó második momentumának nevezzük. Ezt a mennyiséget varianciának, avagy szórásnégyzetnek is hívjuk.

4. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családoknak kb. 20%-ának nincs gyereke,
40%-ának 1 gyereke van,
30%-ának 2 gyereke van,
5%-ának 3 gyereke van,
5%-ának pedig 4.
A 4-nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól.

   (a) A családi pótlékot az alábbi táblázat szerint kapják a családok:

gyerekek száma	0	1	2	3	4
családi pótlék (*fitying*-ben)	0	5000	25000	30000	35000

   Átlagosan hány fitying családi pótlékot kap egy-egy család?

   (b) Átlagosan hány fitying családi pótlékot kapnak a gyerekes családok?

3. További feladatok várható értékkel és szórással kapcsolatban

5. Tekintsük a következő diszkrét eloszlásokat:

(a)

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

(b)

x	11	12	13	14	15	16
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

(c)

x	5	10	15	20	25	30
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?

- a varianciája?
- a szórása?

6. Egy dobozban cédulák vannak. Három cédulán 4-es szám áll, két cédulán 6-os, egy cédulán pedig 7-es. Kihúzunk egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Mennyi a leolvasott szám
   - várható értéke?
   - második momentuma?
   - varianciája?
   - szórása?

7. Egy dobozban 5 golyó van: 3 piros és 2 fehér. Visszatevés **nélkül** húzunk addig, amíg végre pirosat húzunk.
   (a) Adja meg az ehhez szükséges húzások számának eloszlását táblázattal!
   (b) Átlagosan hány húzás kell az első pirosig?

8. Legyen X a szabályos dobókockával dobott szám értéke. Mennyi lesz X várható értéke és szórása?

9. Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok eltérését (különbségük abszolút értékét). Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét és a szórását!

10. Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok összegét. Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét és a szórását!

11. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy fehérrel, és megfigyeljük a dobott számok a piros és a fehér szám különbségét. Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét és a szórását!

12. Egy sorsjátékon 1 darab 1.000.000 Ft-os, 10 db 50.000 Ft-os és 100 darab 5.000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40.000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzék meg?

4. Néhány nevezetes eloszlás

Az alábbi felsorolásban az eloszlások neve után a súlyfüggvény matematikai képlete, a súlyfüggvény és az eloszlásfüggvény angol- illetve magyarnyelvű Excelben használatos neve szerepel, majd egy tömör leírás arról, hogy mikor kell használni. Az eloszlások táblázatai, súly- és eloszlásfüggvényeik grafikonjai a `Diszkret_eloszlasok.xls` fájlban láthatóak.

Hipergeometrikus-eloszlás
Súlyfüggvény:

$$P(X=x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x \text{ értelemszerű alsó és felső határok között kell legyen})$$

$P(X=x) =$ `HYPGEOMDIST(x;n;K;N)`

$P(X=x) =$ `HIPERGEOM.ELOSZLÁS(x;n;K;N)`

Eloszlásfüggvény: Összegzéssel számolandó, mert az összegzésre nincs `HYPGEOMDIST( ... ;TRUE)` opció.

Mikor használjuk: N darab golyó van egy ládában, közülük K darab piros, a többi $N - K$ darab fehér. n-szer húzunk visszatevés **nélkül**. A valószínűségi változó, ami ilyen eloszlást követ:

$X =$ ahányszor pirosat húzunk

Binomiális-eloszlás
Súlyfüggvény:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

$P(X = x) =$ `BINOMDIST(x;n;p;FALSE)`

$P(X = x) =$ `BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;HAMIS)`

Eloszlásfüggvény:

$P(X \leq x) =$ `BINOMDIST(x;n;p;TRUE)`

$P(X \leq x) =$ `BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;IGAZ)`

Mikor használjuk: Általánosan: n darab független, külön-külön p valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$X =$ ahány esemény bekövetkezik az n esemény közül

Speciálisan: N darab golyó van egy ládában, közülük K darab piros, a többi $N - K$ darab fehér. n-szer húzunk **visszatevéssel**. A valószínűségi változó, ami ilyen eloszlást követ:

$X =$ ahányszor pirosat húzunk

Tehát a binomiális eloszlást a **visszatevéses**, a hipergeometrikus eloszlást a **visszatevés nélküli** húzások esetén kell használni.

Poisson-eloszlás
Súlyfüggvény:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

$P(X = x) =$ `POISSON(x;`λ`;FALSE)` (angolul, magyarul egyforma)

Eloszlásfüggvény:

$P(X \leq x) =$ `POISSON(x;n;p;TRUE)` (angolul, magyarul egyforma)

Mikor használjuk: Sok független, külön-külön kis valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$X =$ ahány esemény bekövetkezik

Geometriai-eloszlás
Súlyfüggvény:

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

Eloszlásfüggvény:

$$P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

Mikor használjuk: Egy p valószínűségű eseményre független kísérleteket végzünk addig, amíg először bekövetkezik az esemény. A valószínűségi változó, ami ilyen eloszlást követ:

$X =$ ahány kísérlet kell az esemény első bekövetkezéséhez

FELADATOK:

13. Egy dobozban 5 piros és 4 fehér golyó van. 3 golyót kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen X a kihúzott piros golyók száma. Számolja ki X eloszlását, várható értékét, varianciáját, szórását!

14. Egy dobozban 5 piros és 4 fehér golyó van. 3 golyót kiveszünk visszatevéssel. Legyen X a kihúzott piros golyók száma. Számolja ki X eloszlását, várható értékét, varianciáját, szórását!

15. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a lányok 30%-a kék szemű, 60%-a barna szemű, a többi lány szeme más színű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 25 tagú lány-társaságban a barna szeműek száma

    (a) 10-nél kisebb?
    (b) 5-nél nagyobb?
    (c) 5-nél nagyobb, de 10-nél kisebb?
    (d) 10-nél kisebb, feltéve, hogy 5-nél nagyobb?
    (e) 5-nél nagyobb, feltéve, hogy 10-nél kisebb?

16. Tegyük fel, hogy egy gyakorlatra a 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár el. A teremben csak 250 db szék van.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy minden jelenlévő diáknak jut külön szék?
    (b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) minden jelenlévő diáknak jut külön szék?
    (c) Hány szék kell, hogy legalább 0.99 valószínűséggel minden jelenlévő diáknak jusson külön szék?

17. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után

    (a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
    (b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
    (c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?

18. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Elöveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnének?)

19. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X = 7) =$?

20. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?

21. Sok év adatai alapján feltesszük, hogy egy bizonyos kisvárosban naponta átlagosan 7.5 könnyű baleset és 2.8 súlyos baleset történik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy nap alatt a könnyű balesetek száma

    (a) 10-nél kisebb?

    (b) 5-nél nagyobb?

    (c) 5-nél nagyobb, de 10-nél kisebb?

    (d) 10-nél kisebb, feltéve, hogy 5-nél nagyobb?

    (e) 5-nél nagyobb, feltéve, hogy 10-nél kisebb?

    Hogyan módosulnak a fenti kérdésekre adott válaszok, ha nem az egy, hanem a három egymást követő napon bekövetkező balesetek számára vonatkoznak?

22. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha $4.000.000$ lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz? Mi a valószínűsége annak, hogy valakiknek a főnyereményen osztozni kell (vagyis több mint 1 öttalálatos szelvény lesz)?

23. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy $10:00$ és $10:05$ között legalább 4 hívás érkezik?

24. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!

25. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?

26. A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

27. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

28. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

29. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell(ene) játszania ahhoz, hogy a hármas, találat valószínűsége legalább $1/2$ legyen?

30. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

31. Ha egy országban a átlagosan 2,7 hármasiker születik, akkor mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 hármasiker születik

    (a) egy év alatt?

    (b) két év alatt?

5. További feladatok

32. Egy 13 tagú társaság 7 fiúból és 6 lányból áll. A fiúk mindegyike 0.8 valószínűséggel, a lányok mindegyike 0.9 valószínűséggel - mindenki mástól függetlenül - megy el egy buliba.
    (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a buliba legalább 5 lány elmegy?
    (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a buliban legalább 10-en lesznek, és ugyanannyi fiú lesz, mint lány?
33. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.
    (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dobnánk?
    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?
34. Egy bizonyos városban átlagosan 2.5 embert kell megkérdezni ahhoz, hogy végre egy angolul beszélőt találjunk. Mi a valószínűsége, hogy
    (a) ebben a városban egy véletlenszerűen választott ember angolul beszél?
    (b) több, mint 3 embert kell megkérdezni ahhoz, hogy végre egy angolul beszélőt találjunk?
35. Egy 30 fős kurzuson 8 külföldi van, a többiek magyarok. A magyarok fele lány, fele fiú. A 30 diák közül - egy konferencián való részvételre - 7-et kisorsolnak. Tekintjük az alábbi valószínűségi változókat: X = ahány külföldi, Y = ahány magyar lány van a szerencsések között. Számítsa ki az alábbi valószínűségeket:
    (a) $P(X = 2)$;
    (b) $P(X = 2 \text{ és } Y = 3)$.
36. Kertünk sarkában van egy kis ketrec, abban pedig 5 fehér és 7 barna tyúkocska. A tyúkok naponta - egymástól függetlenül - vagy tojnak egy tojást vagy nem. A fehérek általában 3 napontként, a barnák 4 naponként tojnak.
    (a) A tojások napi számának mennyi a várható értéke?
    (b) Mi a valószínűsége annak, hogy holnap pontosan 2 tojás lesz a ketrecben?
37. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását képlettel: ahány húzás kell visszatevéssel ahhoz, hogy egy magyar kártya pakliból
    (a) végre pirosat húzunk;
    (b) másodszorra pirosat húzunk.
38. Annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos újságban egyetlen sajtóhiba sincs, korábbi ismereteink szerint 0.5.
    (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az újságban pontosan 2 sajtóhiba van?
    (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az újságban pontosan 3 sajtóhiba van, feltéve, hogy van benne sajtóhiba?
39. Egy bizonyos újság minden számába mindig 12 képet tesznek be. Korábbi tapasztalatok szerint minden kép a többitől függetlenül 0.65 valószínűséggel fekvő helyzetű, 0.35 valószínűséggel álló helyzetű. Mi a valószínűsége annak, hogy
    (a) az újságban pontosan 8 fekvő helyzetű kép van?
    (b) az újságban legalább 8 fekvő helyzetű kép van, feltéve, hogy legalább 5 fekvő helyzetű kép van?
40. Egy dobozban 4 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. 3-at húzunk visszatevés nélkül. Legyen X a kihúzott pirosak száma, Y a kihúzott fehérek száma.
    (a) Sorolja fel az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó összes lehetséges értékét!
    (b) Adja meg a $P(X = 1, Y = 2)$ valószínűséget!
    (c) Adja meg a $P(X = k, Y = n)$ valószínűséget k és n megfelelő értékeire, k-t és n-et tartalmazó képlettel kifejezve!