

Matematika A3

Valószínűesszámítás, 5. gyakorlat

2013/14. tavaszi félév

1. Folytonos eloszlások – Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy valószínűségi változó, illetve egy eloszlás eloszlásfüggvényének egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket:

$$F(x) = P(X < x)$$

Egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. a $(-\infty)$ -ben 0-hoz, a ∞ -ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő,
3. mindenhol folytonos.

Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel: $f(x) = F'(x)$. A Newton-Leibniz szabály szerint

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

A $f(x)$ függvény neve: *sűrűségfüggvény*. Ugyancsak a Newton-Leibniz szabály szerint teljesül, hogy tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

FELADATOK:

1. Határozza meg egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású véletlen szám eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének a képletét!
2. Határozza meg egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású véletlen szám négyzete eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének a képletét!
3. Határozza meg egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású véletlen szám négyzetegyöke eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének a képletét!

4. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

(a) $F(x) = 1 + e^{-x+1}$ ha $-1 < x$

(b) $G(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ ha $x \geq 0$

(c) $H(x) = 1 - e^{-x}$ ha $x \geq 0$

(d) $I(x) = \frac{x}{4}(4-x)$ ha $0 < x \leq 2$ és 1 ha $x > 2$

5. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

(a) $f(x) = \frac{2}{x}$ ha $x > 1$

(b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ ha $0 < x < 2$

(c) $h(x) = \frac{1}{3} \sin(\frac{x}{2})$ ha $0 < x < \pi$ és $3^{x-1} \ln(3)$ ha $x \leq 0$

(d) $i(x) = 2e^{-2x}$ ha $x > 0$

2. Folytonos eloszlások – Várható érték és szórás

A folytonos X valószínűségi változó *várható értéke*:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke:

$$\mathbb{E}(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) f(x) dx.$$

A folytonos X valószínűségi változó *szórásnégyzetének* (varianciájának) kiszámítása pedig a jól ismert

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

formula alapján történik.

FELADATOK:

6. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg. (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

(a) $f(x) = 2x$ ($0 < x < 1$)

(b) $f(x) = 2x/a^2$ ($0 < x < a$)

(c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ($0 < x < 1$)

(d) $f(x) = 0.5 + x$ ($0 < x < 1$)

(e) $f(x) = 2e^{-2x}$ ($x \geq 0$)

Rajzolja le a sűrűségfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?
- a varianciája?
- a szórása?

7. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg. (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

(a) $F(x) = x^2$ ($0 < x < 1$)

(b) $F(x) = x^2/a^2$ ($0 < x < a$)

(c) $F(x) = 1 - e^{-2x}$ ($x \geq 0$)

(d) $F(x) = \sqrt{x}$ ($0 < x < 1$)

Rajzolja le az eloszlásfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?
- a variáciája?
- a szórása?

8. Egy Bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a Dél-Szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a Bergengócot?

3. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő:

$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog, „él”, a további jövőjét illetően esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.

Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Megjegyzés: Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy *öregedik*, ha $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ teljesül rá.

Példa: egy elhasználódó alkatrész élettartama.

Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy *fiatalodik*, amennyiben $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) > \mathbb{P}(X > s)$.

Példa: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.

A λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.

A λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlású X valószínűségi változó várható értéke és szórása: $1/\lambda$.

FELADATOK:

9. Tegyük fel, hogy egy nagyvárosi bisztróban, ahol éjjel-nappal ugyanolyan intenzitással jönnek-mennek, esznek-isznak az emberek, a poharak átlagos élettartama 4.5 hónap.

- (a) A poharaknak kb. hány százaléka él kevesebb, mint 3 hónapot?
- (b) A poharaknak kb. hány százaléka él több, mint 6 hónapot?
- (c) A poharaknak kb. hány százalékának esik az élettartama 1 hónap és 3 hónap közé?
- (d) Az 1 hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él több, mint 6 hónapot?
- (e) A 8.25 hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él még tovább még több, mint 1.5 hónapot?

- (f) Az a hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él még tovább még több, mint b hónapot? Vegye észre, hogy a kérdésre a értékeitől függetlenül akármilyen b esetén ugyanaz a válasz adódik! Mit jelent ez a valóságra nézve?
- (g) Mennyi az a időtartam, amelynél a poharak 99 százaléka él hosszabb életet?
- (h) Mennyi az a időtartam, amelynél a poharak 90 százaléka él rövidebb életet?
10. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?
11. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?
12. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?
13. Egy bizonyos fajta mosógép első meghibásodási ideje exponenciális eloszlást követ. A gépek első meghibásodása 70% valószínűséggel történik 5 éven belül. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az első meghibásodás három éven belül történik.
14. Egy bizonyos fajta égőből kettőt használunk a szobában- A lámpák élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy két év múlva
- (a) legalább az egyik világít,
- (b) mindkettő világít!

4. További feladatok

15. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = cx, \quad \text{ha } 0 < x < 2$$

alkalmas c -vel.

- (a) Határozza meg c -t!
- (b) Határozza meg a $P(X < 1)$ valószínűséget!
- (c) Határozza meg a $P(X > 0,5)$ valószínűséget!
- (d) Határozza meg a $P(\frac{1}{3} < X < \frac{4}{3})$ valószínűséget!
- (e) Mi lesz X várható értéke és szórása?
16. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{c}{x^4}, \quad \text{ha } x \geq 1$$

alkalmas c -vel.

- (a) Határozza meg c -t!
- (b) Határozza meg a $P(X < 3)$ valószínűséget!
- (c) Határozza meg a $P(X > 5,5)$ valószínűséget!
- (d) Határozza meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!
- (e) Mi lesz X várható értéke és szórása?

17. Egy bizonyos alkatrész élettartama exponenciális eloszlást követ. Tudjuk, hogy az ilyen alkatrészeknek kb. negyede él tovább, mint 1 év. Az ilyen alkatrészeknek
- (a) mennyi az átlagos élettartama?
 - (b) kb. hányad része él tovább, mint 1.5 év?
18. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x/25$ ($0 < x < 5$).
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy $X < 3$?
 - (b) Mennyi X várható értéke?
19. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = x^3/8$ ($0 < x < 2$).
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy $X > 1,5$?
 - (b) Számolja ki X várható értékét?
20. Tegyük fel, hogy egy bizonyos alkatrész élettartama exponenciális eloszlást követ 2,5 év várható értékkel.
- (a) Az ilyen alkatrészeknek kb. hány százaléka él tovább, mint 3 év?
 - (b) Számolja ki az élettartam szórását!
21. Az X valószínűségi változóra igaz, hogy akármilyen 0 és 2 közötti x szám esetén $P(X > x) = 1 - x^2/4$. Számolja ki X várható értékét és szórását!