Matematika A3

Valószínűségszámítás, 6. gyakorlat

2013/14. tavaszi félév

1. A várható érték és a szórás transzformációja

1. Ha egy valószínűségi változóhoz hozzáadunk
   - ötöt,
   - mínusz ötöt,
   - egy b konstanst,

   akkor hogyan változik

   (a) a várható érték?

   (b) a variancia?

   (c) a szórás?

2. Ha egy valószínűségi változót megszorzunk
   - hárommal,
   - mínusz hárommal,
   - egy a konstanssal,

   akkor hogyan változik

   (a) a várható érték?

   (b) a variancia?

   (c) a szórás?

3. Ha egy valószínűségi változót megszorzunk egy a konstanssal,majd az eredményt növeljük b-vel,akkor hogyan változik

   (a) a várható érték?

   (b) a variancia?

   (c) a szórás?

4. Lehet-e egy valószínűségi változó szórása nulla? Ha igen, mutasson rá példát.

5. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozza meg $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$ értékét!

6. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg az aprópénzem értékének várható értékét és szórását.

7. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0,0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x,y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x|+|y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számolja ki a betegszállítás várható hosszát.

2. Normális eloszlás

A *standard normális eloszlás* sűrűségfüggvénye: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty<x<\infty$,
eloszlásfüggvénye: $\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$ ha $-\infty<x<\infty$.
A $\mu\in\mathbb{R}$ és $\sigma>0$ paraméterű (μ a várható érték, σ a szórás) *normális eloszlás* a standard normálisból származtatható. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $Y=\sigma X+m$ valószínűségi változó μ és σ paraméterű normális eloszlású. Y eloszlásfüggvénye:

$$F(y)=\mathbb{P}(Y<y)=\mathbb{P}(\sigma X+\mu<y)=\mathbb{P}\left(X<\frac{y-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(y)=F'(y)=\frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Tehát ebben a részben a számításokhoz használni kell a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének (a Φ függvénynek) a táblázatát vagy egy olyan kalkulátort, amibe a Φ függvény be van építve, vagy az Excelt.

FELADATOK:

8. Tegyük fel, hogy egy országban a férfiak testmagassága normális eloszlást követ 180 cm várható értékkel és 10 cm szórással.
   (a) A férfiaknak kb. hány százaléka magasabb, mint 190 cm?
   (b) A férfiaknak kb. hány százaléka alacsonyabb, mint 195 cm?
   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott férfi testmagassága 170 és 190 cm közé esik?
   (d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott férfi testmagassága kevesebb, mint 195 cm feltéve, hogy több, mint 175 cm?
   (e) Mennyi az a testmagasság, amelynél a férfiak 10 százaléka alacsonyabb? És az a magasság, aminél a 99 százalék alacsonyabb?
   (f) Mennyi az a testmagasság, amelynél a férfiak 90 százaléka magasabb?
   (g) Mennyi az a testmagasság-eltérés, amelyre igaz, hogy a férfiak 50 százalékának ennél kevesebbel tér a testmagassága az átlagos 180 cm-től?

9. Képzeljünk el egy üzletet, ami minden nap nyitva van. A napi bevétel normális eloszlást követ. Tegyük fel, hogy a várható érték 150 ezer forint és a szórás 20 ezer forint. Egy évben kb. hány olyan nap van, amikor
   (a) a bevétel több, mint 200 ezer forint?
   (b) a bevétel kevesebb, mint 130 ezer forint?
   (c) a bevétel 140 ezer és 150 ezer forint közé esik?
   (d) A bevétel 20 százaléka adó. Mennyi az adó várható értéke és szórása?

10. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)?

11. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő?

12. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik?

13. A két éve ültetett fenyőfák hossza normális elszlát követ 1 méter várható értékel és $0,2$ méter szórással. Határozza meg annak a valsóíznűségét, hogy 100 fenyő közül pontosan 10 hossza nagyobb, mint 120 cm!

14. A négy éve ültetett fenyőfák hossza normális elszlát követ 2 méter várható értékel és 30 centiméter szórással. A legmagasabb 10%-ot akarjuk ivágni. Legalább milyen magas fákat vágjunk ki?

3. Binomiális eloszlás közelítése normálissal – Moivre-Laplace-tétel

15. 100-szor dobunk egy szabályos dobókockával. Legyen X a dobott hatosok száma.
    (a) Milyen (diszkrét!) eloszlást követ ez a valószínűségi változó?
    (b) Mennyi a várható értéke?
    (c) Mennyi a szórása?
    (d) Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke 15 és 20 közé esik, ezeket az értékeket is beleértve?
    (e) Számolja ki ugyenezt a valószínűséget a megfelelő normális eloszlás segítségével is, és vesse össze a két eredményt! Figyeljen rá, hogy a normális eloszlás esetén az intervallum határai 14.5 és a 20.5 kell legyenek!
    (f) Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke ténylegesen 15 és 20 közé esik?
    (g) Számolja ki ezt a valószínűséget is normális eloszlás segítségével! Figyeljen rá, hogy a normális eloszlás esetén most az intervallum határai 15.5 és a 19.5 kell legyenek!

16. Egy szabályos dobókockával $n = 400$-szor dobunk. Legyen X a dobott hatosok száma. Tekintsük a dobott hatosok számának a relatív gyakoriságát, vagyis az X/n valószínűségi változót!
    (a) Milyen (diszkrét!) eloszlást követ ez a valószínűségi változó?
    (b) Mennyi a várható értéke?
    (c) Mennyi a szórása?
    (d) Mi a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság 0.15 és 0.20 közé esik? Számolja ki ezt a valószínűséget binomiális eloszlás segítségével!
    (e) Számolja ki ugyenezt a valószínűséget a megfelelő normális eloszlás segítségével is, és vesse össze a két eredményt!

17. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12.000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

18. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozza meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$
    (a) a binomiális eloszlás segítségével,
    (b) a Moivre–Laplace-tételt használva. Ez utóbbihoz segítség: $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \leq X < 20.5\}$.

4. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy ... ?

19. Szabályos érmével hány dobás kell ahhoz, hogy a "fej" relatív gyakorisága a "fej" valószínűségét 0.05-nél kisebb hibával közelítse 0.95 biztonsággal, azaz valószínűséggel?

20. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy (számunkra nem ismert valószínűségű) esemény valószínűségét az esemény relatív gyakorisága segítségével 0.1 -nél kisebb hibával közelítsük 0.8 biztonsággal, azaz valószínűséggel?

21. Hány dobás kell ahhoz, hogy a relatív gyakoriság segítségével a π szám reciprokát a Buffon-féle tű dobálós módszerrel 0.01 -nél kisebb hibával közelítsük 0.9, biztonsággal, azaz valószínűséggel?

5. Centrális határeloszlás-tétel

22. Az ú.n. Centrális határeloszlás-tétel szerint, ha egy valószínűségi változó sok független valószínűségi változó összegeként áll elő, akkor eloszlása (közelítőleg) normális eloszlás. Ilyen valószínűségi változó például

    - tizenkét random szám összege;
    - egy város lakosainak napi összes gázfogyasztása.

    Keressen a való világban olyan valószínűségi változókat, melyek sok független valószínűségi változó összegeként állnak elő, és ezért normális eloszlással modellezhetőek!

    Centrális határeloszlás-tétel (CHT): legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mu := \mathbb{E}X_i \in \mathbb{R}$ és $\sigma := \mathbb{D}(X_i) \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

    $$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \text{ amint } n \to +\infty, \ (x \in \mathbb{R}).$$

23. Becsülje meg annak valószínűségét, hogy 10.000 kockadobás összege 34.800 és 35.200 közé esik!

24. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

25. A jegyiroda előtt a fiatalok hosszú sorban állnak egy koncertjegyért. Ebben a pillanatban éppen 18-an állnak az egyik pénztár előtt. Megfigyeltem, hogy egy vásárló kiszolgálási ideje memória nélküli valószínűségi változó 3 perc átlaggal és a kiszolgálási idők függetlenek. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy a most utolsóként álló fiatal több mint 60 percet fog a pénztár előtt eltölteni!

6. További feladatok

25. Tegyük fel, hogy egy országban az emberek 75 százaléka sportol. 50 véletlenszerűen választott ember között a sportolók száma legyen X. Írja fel annak a valószínűségét, hogy az 50 véletlenszerűen választott ember közül több, mint 40 sportol az elméletileg pontos diszkrét eloszlással is és a közelítő folytonos eloszlással is!

26. Tegyük fel, hogy egy országban a férfiak testmagassága normális eloszlást követ 180 cm várható értékkel és 15 cm szórással.

    (a) A férfiaknak kb. hány százaléka magasabb, mint 195 cm?

    (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott férfi testmagassága kevesebb, mint 195 cm feltéve, hogy több, mint 165 cm?

27. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba.

    (a) Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?
    (b) Közelítőleg milyen eloszlást követ a zsákban lévő zsömlék összsúlya?
    (c) Mi a (közelítő) valószínűsége annak, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya több, mint 105 dkg?

28. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

29. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: Feldobjuk az érmét 1000-szer. Ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

30. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

31. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0, 30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0, 1]$ intervallumon

    (a) egyenletes;
    (b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?