(Válogatás a feladatgyüjteményből.)

Hasznos azonosság : $\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \qquad (\ a,b,c \in \mathbf{R}^+ ,\ \ b \neq 1\ )}$,

Biz. : $$a^{\log_b c} = (\, c^{\log_c a}\,)^{\log_b c} = c^{\log_b c \cdot \log_c a} = c^{\log_b a} \ .$$

---

1. Rendezzük nagyság szerinti sorrendbe az alábbi számokat :

a.) $a = \lg \sqrt[3]{1000} = 1$, $b = \log_2 0.25 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$, $c = \log_3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\dfrac{1}{3}$, $d = \ln \dfrac{1}{e^4} = -4$, $\Rightarrow$ $\boxed{d < b < c < a}$.

b.) $a = (\frac{1}{9})^{\log_{\sqrt{3}} 5} = (\, (\sqrt{3}\,)^{-4}\,)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = 5^{-4} = \dfrac{1}{625}$, vagy pl. így : $a = (\frac{1}{9})^{\log_{\sqrt{3}} 5} = 5^{\,\log_{\sqrt{3}} 9^{-1}} = 5^{-4} = \dfrac{1}{625}$,

$b = 0.25^{\,\log_2 3} = (\,\dfrac{1}{2^2}\,)^{\log_2 3} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$, vagy pl. így : $b = 0.25^{\,\log_2 3} = 3^{\,\log_2 2^{-2}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$,

$c = 3^{\log_{1/3} 2} = 3^{-\log_3 2} = \dfrac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $\boxed{a < b < c}$.

c.) $a = 3^{2-\log_3 10} = 9 \cdot 3^{-\log_3 10} = \dfrac{9}{10}$, $b = (\,\sqrt{2}\,)^{3-\log_2 5} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^{-\log_2 5}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{10}}{10}$,

$c = 8^{\log_2 6 - 2} = \dfrac{(\, 2^{\log_2 6}\,)^3}{(\, 2^3\,)^2} = \dfrac{6^3}{2^6} = (\, 1.5\,)^3 = \dfrac{15 \cdot 6.25}{10}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a < b < c}$.

d.) $a = \lg 1.2 + \lg 1.5 - \lg 0.9 = \lg \dfrac{1.2 \cdot 1.5}{0.9} = \lg 2$, $b = 2 \cdot \ln 5 - 2 = \ln \dfrac{25}{e^2}$ $(\ > \ln \dfrac{18}{9} > \lg 2\ )$

$c = 3 \cdot \log_2 8 - \dfrac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 16 = 3 \cdot 3 + \log_2 4 = 11$ $(\ = \ln e^{11} > \ln (\, 2^{13} \cdot e^{-2}) > \ln (\, 25 \cdot e^{-2})\ )$

$\Rightarrow$ $\boxed{a < b < c}$.

---

2. Fejezzük ki A-t az alábbi kifejezésekből :

a.) $q = \dfrac{\lg A - \lg C}{\lg 5}$ $\Rightarrow$ $q \cdot \lg 5 = \lg \dfrac{A}{C}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = C \cdot 5^q}$,

b.) $t = \dfrac{\lg A - \lg B}{\lg 2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = B \cdot 2^t}$,

---

3. Számoljuk ki az alábbi kifejezések értékét :

a.) $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \dfrac{34\pi}{3} = \dfrac{49}{(\, 7^2\,)^{\log_7 2}} - \dfrac{1}{5^{\log_5 4}} + \sin (\, \dfrac{4\pi}{3} + 10\pi\,) = \dfrac{49}{4} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{= 12 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$,

vagy pl. így : $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \dfrac{34\pi}{3} = \dfrac{49}{2^{\log_7 49}} - \dfrac{1}{4^{\log_5 5}} + \sin (\, \dfrac{\pi}{3} + 11\pi\,) = \dfrac{49}{4} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ldots$

b.) $(\, \sin 60^\circ\,)^{\sqrt[3]{8}} + \dfrac{3^{10} + 3^{11}}{3^{12} - 3^{10}} + (\dfrac{1}{9})^{\log_{\sqrt{3}} 5} = (\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,)^2 + \dfrac{1+3}{3^2 - 1} + 5^{\log_{\sqrt{3}} 9^{-1}} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{5^4}$ $\boxed{= \dfrac{125}{10^2} + \dfrac{16}{10^4} = 1.2516}$,

c.) $(\, -\cos 30^\circ\,)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0.000002 + 0.25^{\log_2 3} = (\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,)^{-2} + 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 3^{\log_2 2^{-2}} = \dfrac{4}{3} + 10 + \dfrac{1}{3^2}$ $\boxed{= \dfrac{103}{9}}$,

d.) $-0.04^{-\frac{1}{2}} + 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}} = -(\, 2^2 \cdot 10^{-2}\,)^{-\frac{1}{2}} + (\, 10^2\,)^{\lg 5} - (\, 3^4\,)^{-\frac{3}{4}} = -5 + 25 - \dfrac{1}{27}$ $\boxed{= \dfrac{539}{27}}$.

---

4. **a.)** Egy kocka oldalait 1 cm-rel csökkentjük, ekkor a térfogata az eredeti kocka felszínének egyhatodával csökken. Mekkora volt a kocka oldala ?

Legyen a kocka oldala x cm . Ekkor $(x-1)^3 = x^3 - \frac{1}{6}\cdot(6\cdot x^2)$, $\Rightarrow$ $-3x^2+3x-1 = -x^2$,

$\Rightarrow$ $2x^2-3x+1 = 0$ $\Rightarrow$ $x_{12} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{3\pm 1}{4}$, melyből a kocka oldala $\boxed{x=1 \text{ cm}}$.

b.) Egy kocka oldalait 1 cm-rel növeljük, ekkor a térfogata az eredeti kocka felszínének héthatodával nő. Mekkora volt a kocka oldala ?

Legyen a kocka oldala x cm . Ekkor $(x+1)^3 = x^3 + \frac{7}{6}\cdot(6\cdot x^2)$, $\Rightarrow$ $3x^2+3x+1 = 7x^2$,

$\Rightarrow$ $4x^2-3x-1 = 0$ $\Rightarrow$ $x_{12} = \frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 4\cdot 1}}{8} = \frac{3\pm\sqrt{17}}{8}$, melyből a kocka oldala $\frac{3+\sqrt{17}}{8}$ cm.

5. 80000 Ft-ot beteszünk a bankba 10%-os évi kamat mellett. Mennyi pénzünk lesz 5 év múlva ?

$\boxed{80\,000\cdot 1{,}1^5 = 80\,000\cdot 1{,}61051 = 128\,840{,}8 \text{ Ft-unk lesz 5 év múlva}}$.

6. Egy csoport 40 hallgatójának 30% -a kék szemű és 40% -a szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű hallgatók 3/4 -e szőke. Hány olyan hallgató van, aki se nem szőke, se nem kék szemű ?

$40\cdot 0{,}3 = 12$ **kék szemű** hallgató van, ezeknek háromnegyede, azaz 9 hallgató **szőke**.
$40\cdot 0{,}4 = 16$ **szőke** hallgató van összesen,
$12+16-9 = 19$ a száma azon hallgatóknak, akik **vagy kékszeműek, vagy szőkék**.

$\boxed{40-19 = 21 \text{ olyan hallgató van, aki } \textbf{se nem szőke, se nem kék szemű}}$.

Megjegyzés : Halmazelméleti jelölésekkel leírva az okoskodást :

Legyen H a csoport hallgatóinak halmaza. Ekkor H számossága : $|H| = 40$.
Legyen $K\subset H$ a kékszeműek, $S\subset H$ a szőkék halmaza.

Tudjuk, hogy $|K| = 12$ és $|S| = 16$, továbbá hogy $|K\cap S| = 9$.

Ekkor $|K\cup S| = |K| + |S| - |K\cap S| = 12+16-9 = 19$,

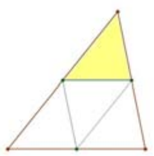
s így $|(H\setminus K)\cap(H\setminus S)| = |H\setminus(K\cup S)| = 40-19 = 21$.

7. Két betét, amelyek közül az első kétszer akkora, mint a második, egy év alatt 6325 eurót kamatozik. A kamatláb a nagyobb, illetve a kisebb betétre 4%, illetve 3,5%. Mekkora volt a két betét értéke ?

Legyen a kisebb betét értéke A . Ekkor $0{,}035\cdot A + 0{,}04\cdot 2A = 6325$, $\Rightarrow$

$A = \frac{6325}{0{,}035+0{,}08} = \frac{6325000}{115} = \frac{5^2\cdot 11\cdot 23\cdot 10^3}{5\cdot 23} = 5\cdot 11\cdot 10^3 = 55000$, $\Rightarrow$ a betétek $\boxed{55\,000 \text{ EUR és } 110\,000 \text{ EUR}}$.

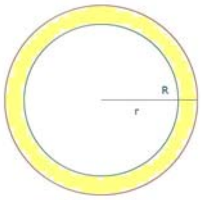
8. Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek ?



A kiindulási háromszög és a sárgán satírozott lemetszett háromszög 2:1 arányúan hasonlóak, így területeik aránya 4:1 .

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A középvonal a háromszöget 3:1 területarányú részekre bontja}}$.

9. Egy 50 cm sugarú kör sugarát 10 cm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökken a területe ?



A csökkenés mértéke $(R^2 - r^2)\cdot\pi = (50^2 - 40^2)\cdot\pi = 90\cdot 10\cdot\pi$,

Ez a nagyobb kör területének $\dfrac{(R^2-r^2)\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}\cdot 100 = \dfrac{90\cdot 10\cdot\pi}{50^2\cdot\pi}\cdot 100 = \dfrac{9}{25}\cdot 100 = 36$ százaléka.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A terület } 36 \text{ százalékkal csökken}}$.

Így is okoskodhattunk volna **:** meghatározzuk, hogy a csökkentett körterület hányszorosa a nagyobb kör területének,

$r^2\cdot\pi = k\cdot R^2\cdot\pi \quad\Rightarrow\quad k = \dfrac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi} = \dfrac{r^2}{R^2}$, esetünkben $k = \dfrac{40^2}{50^2} = \dfrac{16}{25} = 0.64$,

tehát a kisebb kör területe a nagyobbnak 64 %-a, vagyis a csökkenés 36 % .

10. Legyen $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $x > 0$. Hány százalékkal változik a függvény értéke, ha az $x = 1$ helyől **a.)** 2 %-kal nagyobb, vagy **b.)** 3 %-kal kisebb helyre térünk át ? **11.** Hány százalékkal kell növelni vagy csökkenteni az $x = 1$ értékét, hogy a függvény értéke **c.)** 1 %-kal nőjön , **d.)** 2.5 %-kal csökkenjen ?

Az x és $x\cdot s$ ($s > 0$) helyen vett függvényértékekre legyen $f(x)\cdot k = f(x\cdot s)$.

a.) $s = 1.02$, $x = 1$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{f(x\cdot s)}{f(x)} = \dfrac{f(1.02)}{f(1)} = \dfrac{1.02+1}{1.02^2+1} \approx 0.99$ $\Rightarrow$ A függvényérték 1 %-kal csökken,

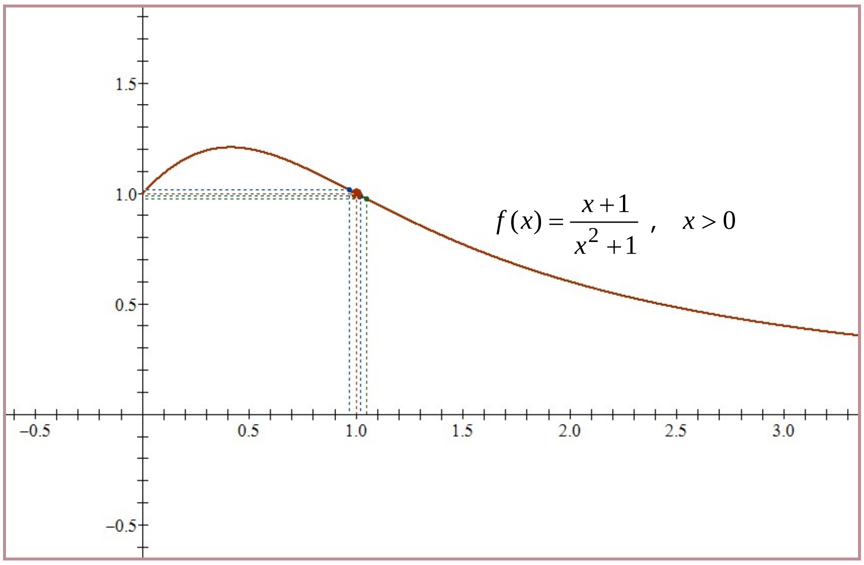
b.) $s = 0.97$, $x = 1$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{f(x\cdot s)}{f(x)} = \dfrac{f(0.97)}{f(1)} = \dfrac{0.97+1}{0.97^2+1} \approx 1.015$ $\Rightarrow$ A függvényérték 1.5 %-kal növekszik,

c.) $k = 1.01$, $x = 1$ $\Rightarrow$ $f(1)\cdot 1.01 = f(s)$ $\Rightarrow$ $1.01 = \dfrac{s+1}{s^2+1}$ $\Rightarrow$ $1.01\cdot s^2 - s + 0.01 = 0$, $s = \dfrac{1\pm\sqrt{1-0.0404}}{2.02}$,

$s = \dfrac{1\pm\sqrt{0.9596}}{2.02} \approx \dfrac{1\pm 0.98}{2.02}$ $\Rightarrow$ $s \approx 0.98$ vagy 0.01 $\Rightarrow$ 2 %-kal kell csökkenteni (vagy 99 %-kal) ,

d.) $k = 0.975$, $x = 1$ $\Rightarrow$ $f(1)\cdot 0.975 = f(s)$ $\Rightarrow$ $0.975 = \dfrac{s+1}{s^2+1}$ $\Rightarrow$ $0.975\cdot s^2 - s - 0.025 = 0$, $s = \dfrac{1\pm\sqrt{1+0.0975}}{1.95}$,

$s = \dfrac{1\pm\sqrt{1.0975}}{1.95} \approx \dfrac{1\pm 1.0476}{1.95}$ $\Rightarrow$ $s \approx 1.050$ $\Rightarrow$ 5 %-kal kell növelni .



12. Árvízi védekezéshez C darab $\frac{p}{q}$ köbméteres tartályt töltöttünk meg homokkal.

Hány darab $\frac{m}{n}$ köbméteres tartályba tudtunk volna ugyanennyi homokot betölteni ?

$$C \cdot \frac{p}{q} = x \cdot \frac{m}{n} \qquad \Rightarrow \qquad x = C \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} \; .$$

$\Rightarrow$ Ha x egész szám, akkor pontosan x darab hordóra lenne szükség,
de ha x nem egész szám, akkor $[x]+1$ hordóra lenne szükség, azonban ekkor az utolsó hordó már nem lenne tele.

13. Egy gép értéke évente 20 %-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének $\frac{3}{4}$ -éért eladták.
Az eredeti értékének hány százalékáért jutott az új tulajdonos a géphez ?

Legyen a gép értéke G. Két év múltán a gépet $G \cdot 0{,}8^2 \cdot \frac{3}{4} = G \cdot 0{,}48$ -ért adják el, ez az eredeti értéknek $\boxed{48 \text{ \%-a}}$.

14. Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé.
Az első elnyeli a ráeső fényenergia 30 %-át, a második a ráeső fényenergia 45 %-át, a harmadik pedig a ráeső energia 25 %-át.
A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el ?

Az első lemez a ráeső fényenergia 70 %-át, a második a ráeső fényenergia 55 %-át,
a harmadik pedig a ráeső energia 75 %-át engedi át.
A három lemez együttesen így az eredeti fénysugár energiájának $0{,}7 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}75 = 0{,}28875$ -szeresét engedi át,
azaz az eredeti fénysugár $28{,}875$ százalékát.

A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának $\boxed{71{,}125}$ százalékát nyeli el .