(Válogatás a feladatgyüjteményből.)

1.) $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{x+5} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 1 - \dfrac{2x+10-10}{x+5} = 1 - \left(2 - \dfrac{10}{x+5} \right) = \dfrac{10}{x+5} - 1 \ .$

Ábrázolás Függvénytranszformációval :

1. $y = \dfrac{1}{x}$

2. $y = \dfrac{1}{x+5}$

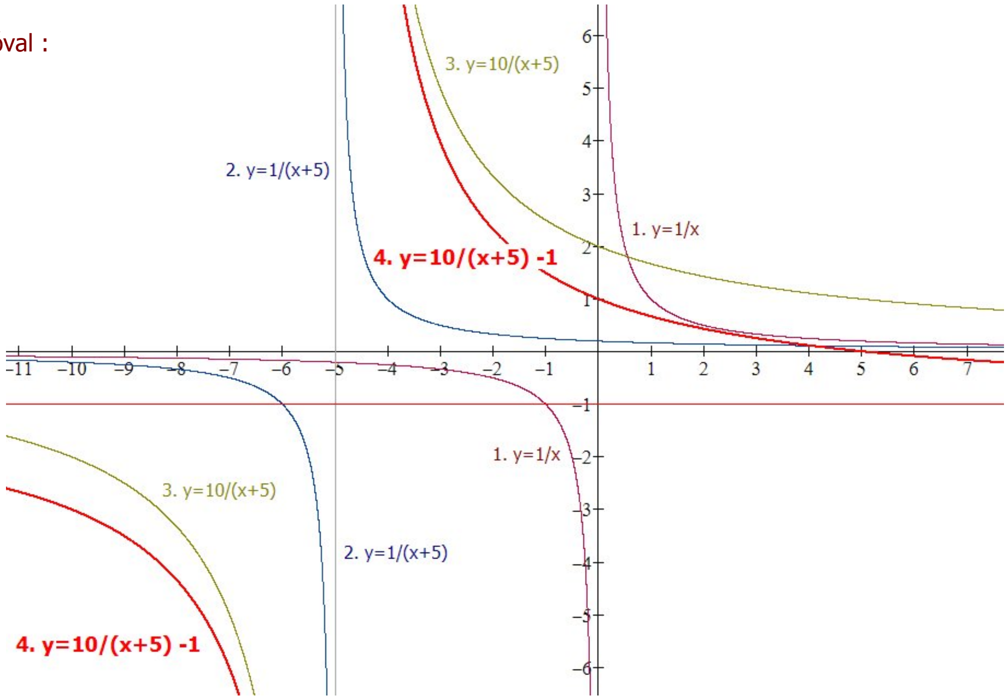
(x tengely mentén
eltolás balra 5-tel)

3. $y = \dfrac{10}{x+5}$

(y tengely mentén
10-szeresre nyújtás)

4. $y = \dfrac{10}{x+5} - 1$

(y tengely mentén
eltolás lefelé 1-gyel)



Ábrázolás Koordinátatranszformációval :

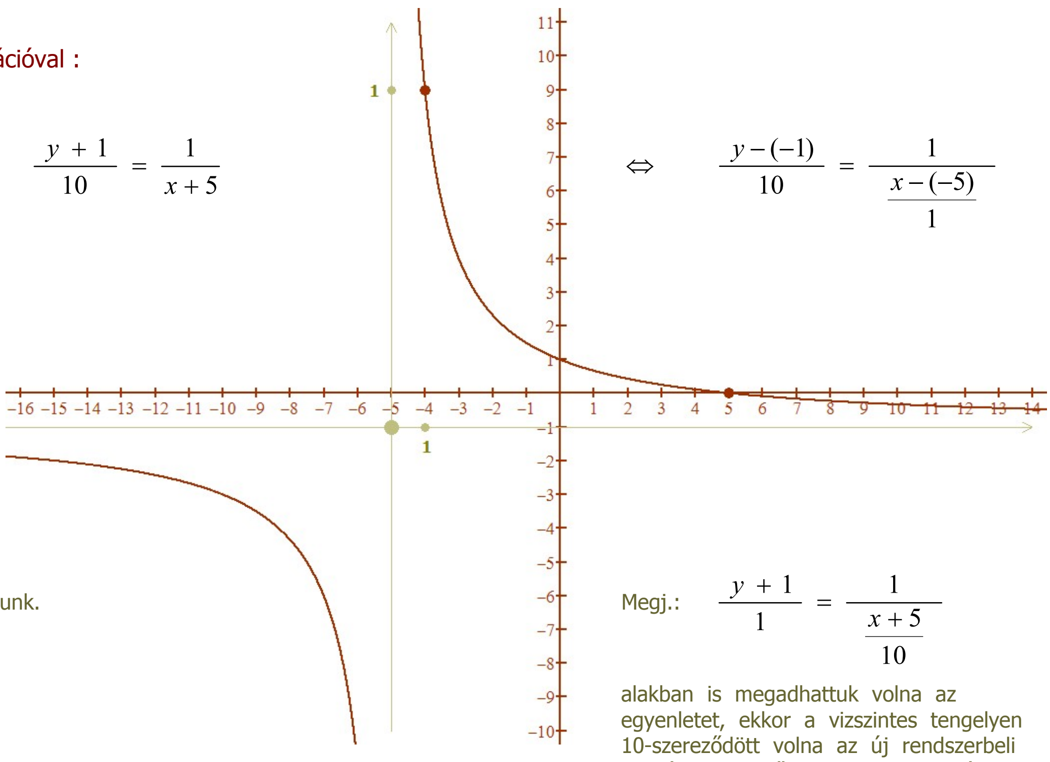
$$y = f(x) = \frac{10}{x+5} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+1}{10} = \frac{1}{x+5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-(-1)}{10} = \frac{1}{\dfrac{x-(-5)}{1}}$$

Az új koordinátarendszer origója
$(x_0, y_0) = (-5, -1)$,

az új tengelyeken
az egységek
a régi egységek

$A = 1$ ill. $B = 10$ -szeresei.

Ebben az új koordinátarendszerben
az $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ grafikont kell ábrázolnunk.



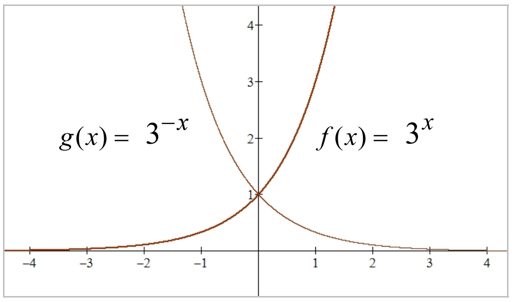
Megj.: $\dfrac{y+1}{1} = \dfrac{1}{\dfrac{x+5}{10}}$

alakban is megadhattuk volna az egyenletet, ekkor a vizszintes tengelyen 10-szereződött volna az új rendszerbeli egység, a függőleges tengelyen változatlan maradt volna. Az ábrázolt grafikon u.a.

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{x+5} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x+5 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad -5 < x < 5 \ .$$

$$f(1) + f(-1) = \left(\frac{10}{1+5} - 1 \right) + \left(\frac{10}{-1+5} - 1 \right) = \frac{10}{6} + \frac{10}{4} - 2 = \frac{10+15-12}{6} = \frac{13}{6} \ .$$

2.) Rajzoljuk fel az $f(x) := 3^x$ és a $g(x) := 3^{-x}$ hozzárendelésekkel definiált függvények grafikonjait !
Adjuk meg az $f(a+2)-f(a-2)$ és a $g(a+2)-g(a-2)$ értékeket ! ($a \in \mathbf{R}$)
Határozzuk meg az $x \mapsto f(g(x))$ és az $x \mapsto g(f(x))$ összetett függvényeket ! ($f \circ g$ és $g \circ f$ függvénykompozíciók)



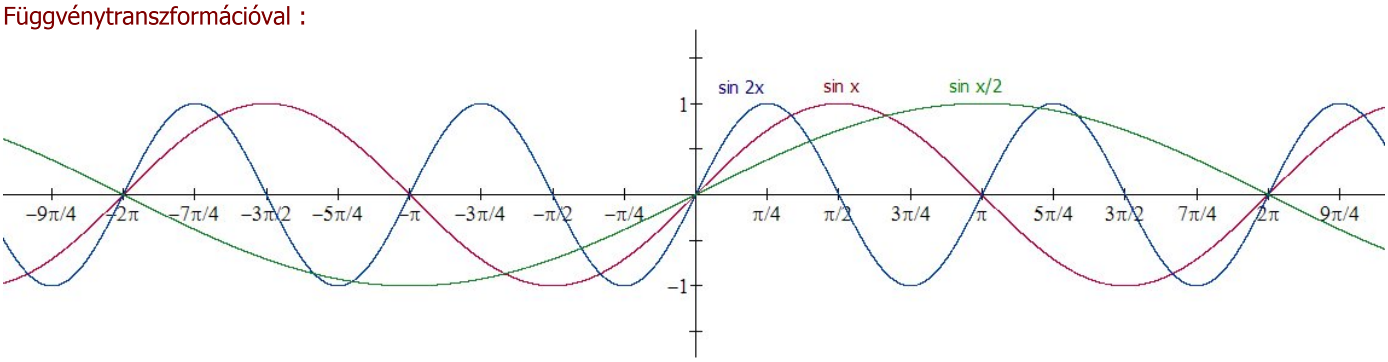
$$f(a+2)-f(a-2) = 3^{a+2} - 3^{a-2} = 9\cdot 3^a - \frac{1}{9}\cdot 3^a = (9-\frac{1}{9})\cdot 3^a$$
$$\boxed{= \frac{80}{9}\cdot 3^a} \qquad (= \frac{80}{9}\cdot f(a)) .$$

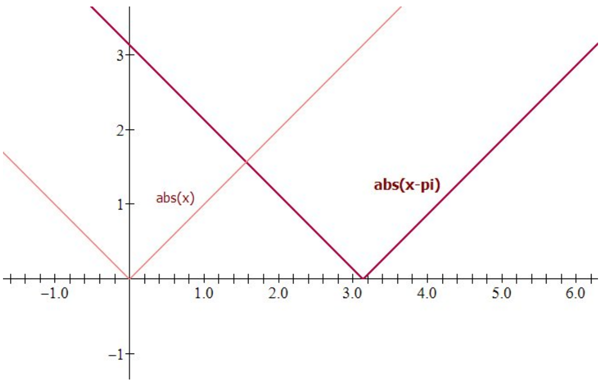
$$g(a+2)-g(a-2) = 3^{-(a+2)} - 3^{-(a-2)} = \frac{1}{9}\cdot 3^{-a} - 9\cdot 3^{-a} = (\frac{1}{9}-9)\cdot 3^{-a}$$
$$\boxed{= -\frac{80}{9}\cdot 3^{-a}} \qquad (= -\frac{80}{9}\cdot g(a)) .$$

$$f(g(x)) = 3^{g(x)} = 3^{3^{-x}} \quad (x \in \mathbf{R}) \qquad \text{és} \qquad g(f(x)) = 3^{-f(x)} = 3^{-3^x} \quad (x \in \mathbf{R}) .$$

3.) Rajzoljuk fel az $x \mapsto \sin x$, $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\frac{x}{2}$, $h(x) = |x-\pi|$ függvények grafikonjait !
Ezek közül melyik függvény lesz szigorúan monoton növő a $(0, \pi)$ intervallumon ?

Függvénytranszformációval :





az itt szereplő függvények közül csak
az $x \mapsto \sin\frac{x}{2}$ függvény
szig. mon. növő a $(0, \pi)$ intervallumon.

4.) Adjuk meg az alábbi függvények zérushelyeit és értelmezési tartományát :

a.) $$f(x) = \frac{2x\,(x-2)^2 - 2\,(x-2)\cdot x^2\cdot 2}{(x-2)^4} \qquad D_f = \mathbf{R}\setminus\{2\}$$

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(x-2)\cdot(\,(x-2)-x\cdot 2\,) = 2x\cdot(x-2)\cdot(-2-x) = -2x\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$$

$\Rightarrow$ f nullhelyei : $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, b.) $g(x) = \dfrac{4\,(x^2-1)\cdot x\cdot x^3 - 3x^2\cdot(x^2-1)^2}{x^6}$ $\qquad D_g = \mathbf{R}\setminus\{\,0\,\}$

$g(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)\cdot x^2\cdot(\;4\,x^2-3\cdot(x^2-1)\;) = (x^2-1)\cdot x^2\cdot(\,x^2+3\,) = 0$

$\Rightarrow \quad g$ nullhelyei **:** $\quad x_1 = 1\,,\quad x_2 = -1\,,$

c.) $h(x) = \dfrac{2x\,(x^2-4)^2 + 2\,(x^2-4)\cdot 3x\cdot x^2}{(x^2-4)^4}$ $\qquad D_h = \mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$

$h(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(x^2-4)\cdot(\;(x^2-4)+3\cdot x^2\;) = 2x\cdot(x^2-4)\cdot(\,4x^2-4\,) = 8\,x\cdot(x^2-4)\cdot(\,x^2-1\,) = 0$

$\Rightarrow \quad h$ nullhelyei **:** $\quad x_1 = 0\,,\quad x_2 = 1\,,\quad x_3 = -1\;.$

5.) Függvények kompozíciója (*Összetett függvény*) : $\qquad f\circ g \qquad\qquad g\circ f$

$f(x) = \ln^2(x)\,,\qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad f(g(x)) = \ln^2(\,\sqrt[3]{x^2+1}\,)\,,\qquad g(f(x)) = \sqrt[3]{(\ln^2(x))^2+1}$

$\qquad = \dfrac{1}{9}\cdot\ln^2(\,x^2+1\,) \qquad\qquad = \sqrt[3]{\ln^4(x)+1}$

$D_f = \mathbf{R}^+\,,\qquad R_f = \mathbf{R}^+\cup\{\,0\,\}$

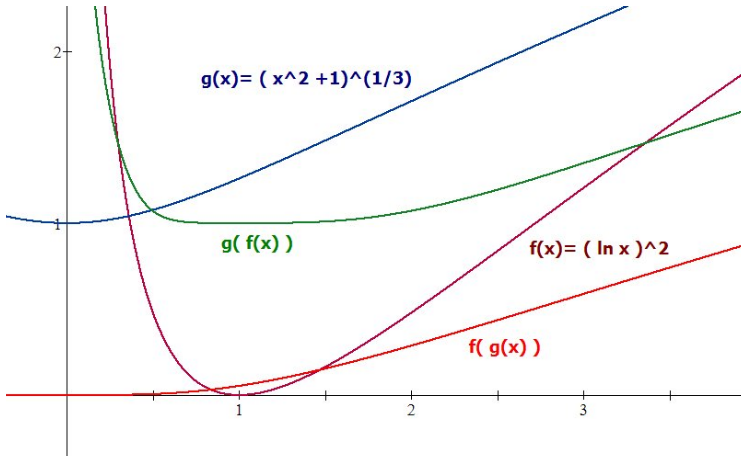
$D_g = \mathbf{R}\,,\qquad R_g = [\,1,+\infty\,)$

$D_{f\circ g} = \mathbf{R}\,,\qquad R_{f\circ g} = \mathbf{R}^+\cup\{\,0\,\}$

$D_{g\circ f} = \mathbf{R}^+\,,\qquad R_{g\circ f} = [\,1,+\infty\,)$

$f(g(0)) = f(1) = 0\,,$

$g(f(1)) = g(0) = 1\;.$



6.) Legyen $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\,,\quad g(x) = \sin 3x\;.$ Adjuk meg az $f(g(0))$ és a $g(f(0))$ értékeket !

$f(g(0)) = \mathrm{e}^{(g(0))^2} = \mathrm{e}^{(\sin(3\cdot 0))^2} = \mathrm{e}^{(0)^2} = \mathrm{e}^0 = 1\,,\qquad g(f(0)) = \sin(3\cdot f(0)) = \sin(3\cdot\mathrm{e}^{(0)^2}) = \sin 3\;.$

7.) Függvények inverze (*Injektív függvények esetén* !!!) :

Definíció : Az $f : X\to Y$ függvényt *injektív*-nek nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármely két x_1, x_2 helyére az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből $x_1 = x_2$ következik.

(Azaz: $\forall\, x_1, x_2\in D_f \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,,$ vagy másképpen: $\forall\, x_1, x_2\in D_f \quad x_1\neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\neq f(x_2)$) .

Megj. :

1. Pl. a szigorúan monoton növő ill. szigorúan monoton fogyó függvények injektívek.
2. Pl. az $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény injektív, de nem szigorúan monoton. ($\mathbf{R}^+$-on ill. $\mathbf{R}^-$-on külön-külön szig.mon. fogyó)

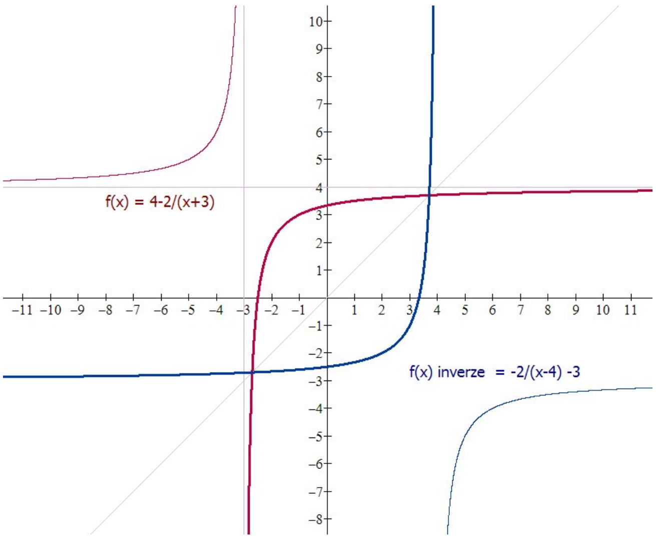
Definíció : Az $f: X \to Y$ injektív függvény *inverze* az $f^{-1}: R_f \to D_f$, $f^{-1}(f(x)) = x$ függvény .

(f inverze tehát az f függvénykapcsolat "megfordítása" **:** f^{-1} értelmezési tartománya az f értékkészlete, és f^{-1} az R_f y elemeihez azt az $x \in D_f$ elemet rendeli, melyre $f(x) = y$, (azaz $f^{-1}(y) = x$, ha $f(x) = y$). f^{-1} értékkészlete emiatt az f értelmezési tartományával egyezik.)

$\Rightarrow$ Descartes-koordinátarendszerben ábrázolva f^{-1} grafikonja az f grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe .

7.a.)

$f(x) = 4 - \dfrac{2}{x+3}$ injektív függvény, hiszen $\forall\, x_1, x_2 \in D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ $\quad 4 - \dfrac{2}{x_1+3} = 4 - \dfrac{2}{x_2+3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$.



f inverzének meghatározása **:**

$D_{f^{-1}} = R_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, és

$x = 4 - \dfrac{2}{f^{-1}(x)+3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = -\dfrac{2}{x-4} - 3}$.

$R_{f^{-1}} = D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

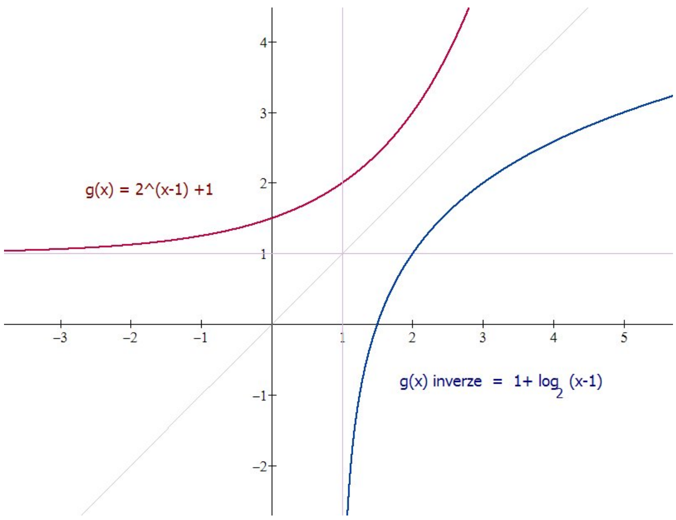
Az inverz meghatározásánál lényegében úgy járhatunk el, hogy a függvényváltozót és a függvényértéket megcseréljük, így az inverzfüggvény implicit alakját kapjuk, majd ebből az explicit alakot meghatározzuk :

$y = 4 - \dfrac{2}{x+3}$ injektív függvénykapcsolat (f) $\Rightarrow$ $x = 4 - \dfrac{2}{y+3}$ f inverzének (f^{-1} -nek) implicit alakja

$$\Rightarrow \quad x - 4 = -\frac{2}{y+3} \quad \Rightarrow \quad y + 3 = -\frac{2}{x-4} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{x-4} - 3 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = -\frac{2}{x-4} - 3 \ .$$

7.b.)

$g(x) = 2^{x-1} + 1$ injektív függvény, hiszen szig.mon.növő. (Így $\forall\, x_1, x_2 \in D_g = \mathbf{R}$ $\quad 2^{x_1-1} + 1 = 2^{x_2-1} + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$.)



g inverzének meghatározása **:**

$D_{g^{-1}} = R_g = (1, +\infty)$, és

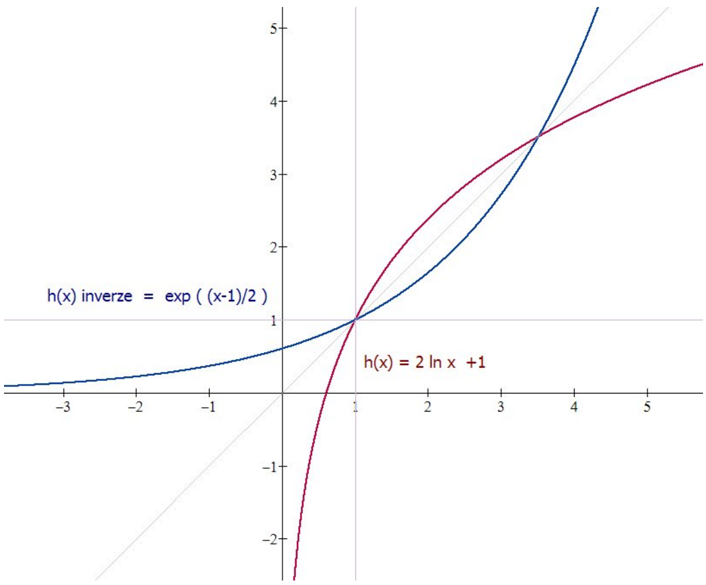
$x = 2^{g^{-1}(x)-1} + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g^{-1}(x) = \log_2(x-1) + 1}$.

$R_{g^{-1}} = D_g = \mathbf{R}$

Vagy így **:** $y = 2^{x-1} + 1 \quad \xrightarrow{inverz} \quad x = 2^{y-1} + 1$

$\Rightarrow \quad y - 1 = \log_2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = \log_2(x-1) + 1$

7.c.) $h(x) = 2\ln(x)+1$ injektív függvény, hiszen szig. mon. növő.



h inverzének meghatározása :

$D_{h^{-1}} = R_h = \mathbf{R}$, és

$x = 2\ln(h^{-1}(x))+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}}}$.

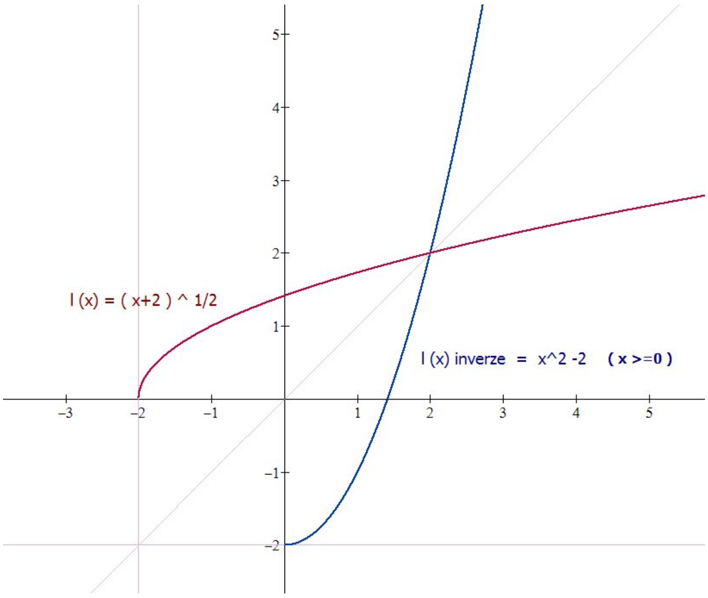
$R_{h^{-1}} = D_h = \mathbf{R}^+$

Vagy így :

$y = 2\ln x + 1 \quad \xrightarrow{inverz} \quad x = 2\ln y + 1$

$\Rightarrow \quad \ln y = \dfrac{x-1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{x-1}{2}}$

7.d.) $l(x) = \sqrt{x+2}$ injektív függvény, hiszen szig. mon. növő.



l inverzének meghatározása :

$D_{l^{-1}} = R_l = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, és

$x = \sqrt{l^{-1}(x)+2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l^{-1}(x) = x^2-2}$.

$R_{l^{-1}} = D_l = [-2, +\infty)$

Vagy így :

$y = \sqrt{x+2} \quad \xrightarrow{inverz} \quad x = \sqrt{y+2}$

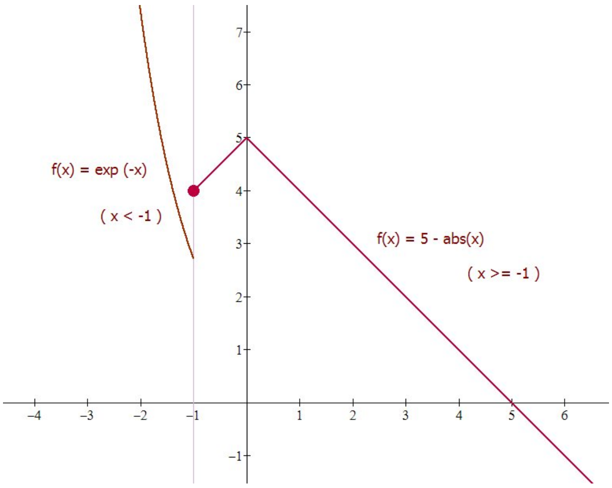
$\Rightarrow \quad y+2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2-2$

8. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket :

a.)

$f(x) = 5-|x|$ ha $x \ge -1$

$f(x) = e^{-x}$ ha $x < -1$



$f(1) = 4$

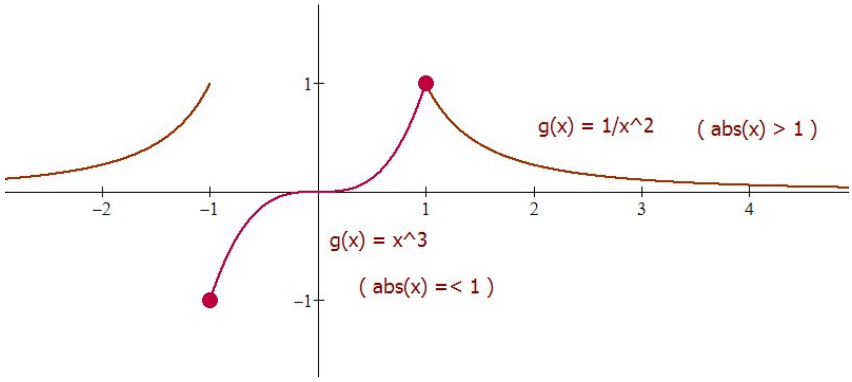
$f(-2) = e^2$

8.b.) $g(x) = 1/x^2$ ha $|x| > 1$

$g(x) = x^3$ ha $|x| \leq 1$

Adjuk meg a függvény minimumait és maximumait a $[-3, 2]$ intervallumon !

A $[-3, 2]$ intervallumon a fv. minimális értéke -1, maximális értéke 1, melyeket a fv. az $x = -1$ ill. az $x = 1$ helyeken vesz fel.



8.c.) $h(x) = x^2 - 2x$ ha $x \leq 2$

$h(x) = (x-2)\cdot(4-x)$ ha $x > 2$

Adjuk meg a függvény lokális minimum és maximumhelyeit a $[-2, 5]$ intervallumon !

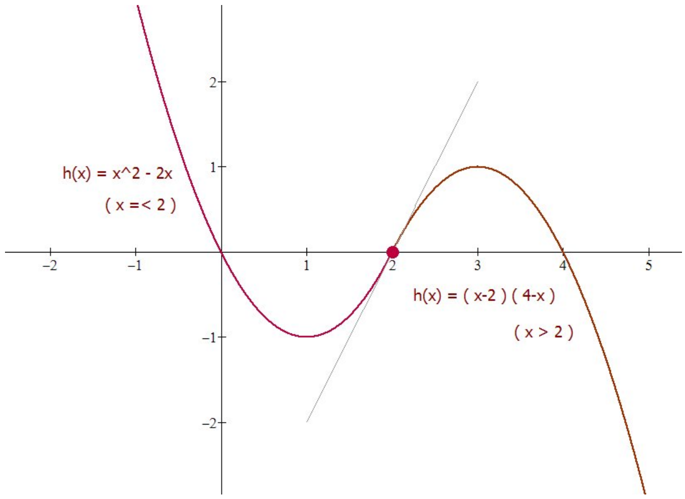
A $[-2, 5]$ intervallumon a fv.

lokális minimumhelye $x = 1$

($f(1) = -1$ a lokális minimumérték),

lokális maximumhelye $x = 3$

($f(3) = 1$ a lokális maximumérték).



9. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartomámyát és zérushelyeit :

a.) $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$

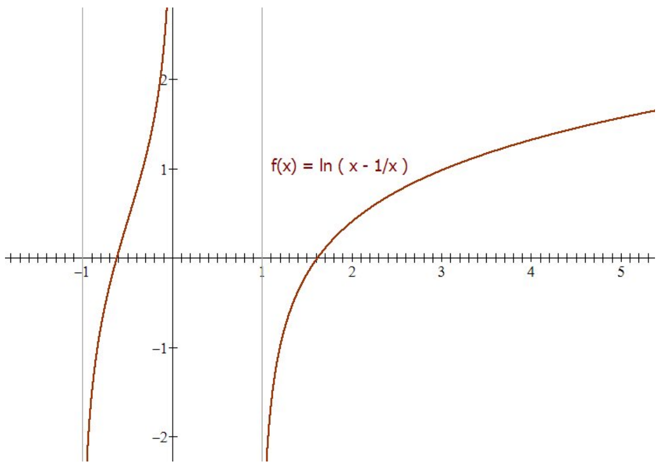
Értelmezési tartomány: $x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow$ pozitív x-ek esetén $x^2 > 1$, negatív x-ek esetén $x^2 < 1$

$\Rightarrow \quad \boxed{D_f = (-1, 0) \cup (1, +\infty)}$.

Nullhelyek : $x - \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$.



b.) $f(x) = 3 - \sqrt{1 - 2x}$

Értelmezési tartomány: $x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{D_f = (-\infty, 0.5\,]}$.

Nullhelyek : $3 - \sqrt{1 - 2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x = 9$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = -4}$.