---

1. Minden $x \in \mathbf{R}$ esetén teljesül, hogy $(x+2)\cdot(x+b) = x^2 + c\cdot x + 6$. $b = ?$ $c = ?$

A bal oldali fv. nullhelyei -2 és $-b$, a jobb oldali másodfokú fv. nullhelyeivel egyeznek, így a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján $(-2)\cdot(-b) = 6 \Rightarrow \boxed{b=3}$; és $-(-2-b) = c$, $\Rightarrow \boxed{c=5}$.

Megj.: A fenti okoskodás másképpen, hogy először a bal oldalt átalakítjuk : $(x+2)\cdot(x+b) = x^2 + (2+b)\cdot x + 2\cdot b$, majd az együtthatók egyenlőségét írjuk fel : $2\cdot b = 6$, $2+b = c \Rightarrow \boxed{b=3}$ és $\boxed{c=5}$.

---

2. **a.)** $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10 \Leftrightarrow |x+3| + |x-4| = 10$

Ha $x < -3$, akkor az egyenlet :

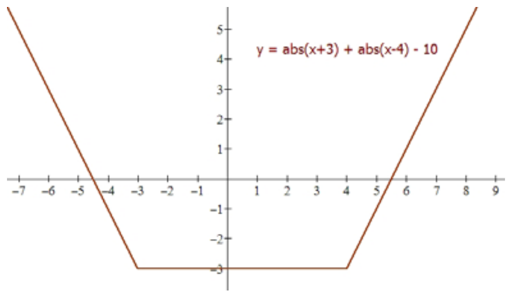
$-(x+3) - (x-4) = 10 \Rightarrow 2x = -9$ $\boxed{x = -4.5}$,

Ha $-3 \le x < 4$, akkor az egyenlet :

$(x+3) - (x-4) = 10 \Rightarrow$ $\boxed{\text{nincs ilyen } x}$,

Ha $4 < x$, akkor az egyenlet :

$(x+3) + (x-4) = 10 \Rightarrow 2x = 11$ $\boxed{x = 5.5}$.



---

b.) $\dfrac{7}{7-x} > 0 \Leftrightarrow 7 - x > 0$, tehát $\boxed{x < 7}$ esetén teljesül az egyenlőtlenség .

---

c.) Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek két gyöke $\dfrac{1}{2}$ és $-\dfrac{1}{3}$?

Ha a másodfokú tag együtthatója 1 , akkor a gyöktényezős alak : $(x - \frac{1}{2})\cdot(x + \frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})\cdot x + (\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{6}\cdot x - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \boxed{6x^2 - x - 1 = 0}$.

---

d.) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{15} \Rightarrow$ (az egyenletet $15x \ne 0$ -val szorozva) $30 - 3\cdot x^2 = x \Leftrightarrow 3x^2 + x - 30 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 3\cdot 30}}{2\cdot 3} = \dfrac{-1 \pm 19}{6} \Rightarrow \boxed{x_1 = 3,\quad x_2 = -\frac{10}{3}}$.

---

e.) $|2x - 4| < 6 \Leftrightarrow |x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow \boxed{-1 < x < 5}$.

---

3. **a.)** $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 = 0$

I. Ha $x^2 + 3x < 0$, azaz $x\cdot(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$,

akkor az egyenlet : $-3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$,

II. Ha $x^2 + 3x \ge 0$, azaz $x\cdot(x+3) \ge 0 \Leftrightarrow x \le -3$ vagy $0 \le x$,

akkor az egyenlet : $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ $x_2 = -2$ nem megf.

---

b.) $\left(1+\frac{4}{x^2+x-6}\right)\cdot\left(\frac{1}{x+1}+1\right)=0 \qquad (\Rightarrow \quad x\neq 2,\ -3,\ -1\ ).$

A bal oldali szorzat pontosan akkor (akkor és csak akkor) zérus, ha valamelyik tényező zérus.

I. $1+\frac{4}{x^2+x-6}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-6=-4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-2\,,\quad x_2=1}\,,$

II. $\frac{1}{x+1}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+1=-1 \quad\Rightarrow\quad x_1=-2\,,$ nem ad új gyököt.

---

c.) $x^4+5x^3-6x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\cdot(x^2+5x-6)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=0\,,\quad x_2=-6\,,\quad x_3=1}\,.$

---

d.) $\frac{x+3}{x-4}+\frac{22}{x^2-16}=\frac{7x+6}{x+4}-\frac{3}{x-4} \qquad (\Rightarrow \quad x\neq\pm 4\ ).$ Az egyenletet x^2-16 -tal szorozva kapjuk :

$(x+3)\cdot(x+4)+22=(7x+6)\cdot(x-4)-3\cdot(x+4) \quad\Leftrightarrow\quad x^2+7x+34=7x^2-25x-36 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-16x-35=0\,,$

$$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2+12\cdot 35}}{6}=\frac{16\pm 2\sqrt{8^2+3\cdot 35}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{169}}{3}=\frac{8\pm 13}{3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=7\,,\quad x_2=-\frac{5}{3}}\,.$$

---

4. Adjuk meg a megoldásokat az " a " paraméter függvényében !

a.) $(a\,x-1)^2+(x-a)^2=x^2-2+a^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2x^2-4\,a\,x+3=0 \quad\Rightarrow\quad a=0$ esetén nincsen gyök, ha pedig $a\neq 0$,

akkor $x_{1,2}=\frac{4\,a\pm\sqrt{16\,a^2-12\,a^2}}{2\,a^2}=\frac{2\,a\pm|a|}{a^2}=\frac{2\,a\pm a}{a^2}=\frac{2\pm 1}{a}\,, \quad\Rightarrow$ tehát a megoldások $\boxed{x_1=\frac{3}{a} \quad\text{és}\quad x_2=\frac{1}{a}}\,.$

---

b.) $(a\,x+1)^2+(a\,x+1)\cdot(a\,x-1)=4 \quad\Leftrightarrow\quad a^2x^2+a\,x-2=0 \quad\Rightarrow\quad a=0$ esetén nincsen gyök, ha pedig $a\neq 0$,

akkor $x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8\,a^2}}{2\,a^2}=\frac{-a\pm 3\cdot|a|}{2\,a^2}=\frac{-a\pm 3\,a}{2\,a^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_{12}=\frac{-1\pm 3}{2\,a}}\,,$ tehát $\boxed{x_1=\frac{1}{a} \quad\text{és}\quad x_2=-\frac{2}{a}}\,.$

---

c.) $(1-a)\cdot x^2+x+a=0 \quad\Rightarrow$ **I.** Ha $a=1$: $\quad x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1\,.$ **II.** Ha $a\neq 1$: $\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\,a\,(1-a)}}{2\,(1-a)}=$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{4\,a^2-4\,a+1}}{2\,(1-a)}=\frac{-1\pm|2\,a-1|}{2\,(1-a)}=\frac{-1\pm(2\,a-1)}{2\,(1-a)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=-1,\quad x_2=\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}}$$

(a -1 itt is gyök).

---

5. Legyen $x_1,\ x_2$ egy másodfokú normált egyenlet ($x^2+p\cdot x+q=0$) két megoldása. Bizonyítsuk be, hogy :

a.) $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$, $\qquad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\,x_1\,x_2=(-p)^2-2\cdot q$.

b.) $x_1+x_1\cdot x_2+x_2=q-p$, $\qquad (x_1+x_2)+(x_1\cdot x_2)=-p+q$.

c.) $(x_1-x_2)^2=p^2-4q$, $\qquad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4\,x_1\cdot x_2=(-p)^2-4\cdot q$.

d.) $(x_1+x_2)^2=p^2$, $\qquad (x_1+x_2)^2=(-p)^2$.

6. Milyen $k \in \mathbf{R}$ esetén **a.)** lesz két azonos megoldás, **b.)** lesz két különböző megoldás, ill. **c.)** nem lesz valós megoldás az alábbi másodfokú egyenleteknél ?

A kérdésekre a válaszokat a diszkriminans előjelének vizsgálata alapján tudjuk megadni.
$D > 0$ esetén két különböző, $D = 0$ esetén két egybeeső megoldás van, $D < 0$ esetén nincs valós megoldás.

a.) $x^2 - kx + 3 - k = 0$, $D = (-k)^2 - 4(3-k) = 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = -6, \quad k_2 = 2}$.

b.) $x^2 - (k+3)x + 4 = 0$, $D = (-(k+3))^2 - 4 \cdot 4 > 0 \Leftrightarrow |k+3| > 4 \Leftrightarrow$

$k + 3 < -4$ vagy $k + 3 > 4 \Leftrightarrow \boxed{k < -7}$ vagy $\boxed{k > 1}$.

c.) $x^2 + kx - (2k-5) = 0$, $D = k^2 + 4(2k-5) < 0 \Leftrightarrow k^2 + 8k - 20 < 0 \Leftrightarrow \boxed{-10 < k < 2}$.

7. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola csúcspontja $M(1, -1))$, a parabola és az x tengely egyik metszéspontja $(2, 0)$.
Határozzuk meg a, b, c értékeit !

A csúcspont kielégíti az egyenletet : $-1 = a + b + c$,
Az x tengellyel egyik mp.-ja $(2, 0)$: $0 = 4a + 2b + c$

Az x tengellyel masik mp.-ja $(0, 0)$: $\boxed{c = 0}$,
u.i. a parabola tengelye az $x = 1$ egyenes.

$$\begin{aligned} a + b &= -1 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1, \quad b = -2} \ .$$

A parabola egyenlete : $y = x^2 - 2x$.