1. a.) $2^{|x+1|+x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1|+x=1$

Ha $x+1<0$, akkor az egyenlet: $-(x+1)+x=1 \quad \Rightarrow \quad -1\neq 1$, nincs ilyen x ,

Ha $x+1\geq 0$, akkor az egyenlet: $(x+1)+x=1 \quad \Rightarrow \quad 2x=0$, tehát a megoldás $\boxed{x=0}$.

b.) $x+3\sqrt[3]{x^2}-18\sqrt[3]{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}-18\sqrt[3]{x}=0$. Legyen $u:=\sqrt[3]{x}$, ekkor $u\cdot(u^2+3u-18)=0$,

a gyökök $u=0,\,-6,\,3 \quad \Rightarrow \quad x=0,\,(-6)^3,\,3^3$, tehát a megoldások $\boxed{x=0,\,-216,\,27}$.

c.) $\dfrac{1+4^{x-1}}{4^x}=\dfrac{17}{2^{x+3}} \quad \Leftrightarrow$ ($8\cdot 4^x$-nel szorozva az egyenletet) $8\cdot(1+4^{x-1})=17\cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot(2^x)^2-17\cdot 2^x+8=0$

$$2^x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 2\cdot 8}}{4}=\frac{17\pm\sqrt{(17-8)\cdot(17+8)}}{4}=\frac{17\pm\sqrt{9\cdot 25}}{4}=\frac{17\pm 15}{4} \quad\Rightarrow\quad 2^{x_1}=8,\quad 2^{x_2}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=3,\quad x_2=-1}\,.$$

d.) $\lg\sqrt{x^2-3x}-\lg\sqrt{3-x}=\lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad \lg\dfrac{\sqrt{-x\cdot(3-x)}}{\sqrt{3-x}}=\lg 5 \quad \Rightarrow \quad \lg\sqrt{-x}=\lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-x}=5 \quad \boxed{x=-25}$.

2. a.) $\sqrt{9^x+7-3^{x+2}}>3^x-5 \quad \Rightarrow$ Szükséges, hogy $(3^x)^2-9\cdot 3^x+7\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x\leq\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}$ vagy $3^x\geq\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}$.

I. Ha $3^x\leq\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}$, akkor $3^x-5\leq\dfrac{9-\sqrt{53}-10}{2}<0$, így az egyenlőtlenség teljesül , tehát $\boxed{x\leq\log_3\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}\text{ megoldások}}$,

II. ha pedig $3^x\geq\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}$, akkor $3^x-5\geq\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}>0$ miatt az egyenlőtlenség négyzetre emelhető, így a megoldásokra:

$9^x+7-3^{x+2}>9^x-10\cdot 3^x+25 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x>18 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x>\log_3 18}$ (ezek mind megoldások, u.i. $3^x>18>\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}$) .

Megj.: Hasonlóképpen oldható meg pl. $\sqrt{9^x+8-3^{x+2}}>3^x-5 \quad \Rightarrow \quad (3^x)^2-9\cdot 3^x+8\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x\leq\dfrac{9-7}{2}$ vagy $3^x\geq\dfrac{9+7}{2}$.

I. Ha $3^x\leq 1$, akkor $3^x-5<0$, így az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül , tehát $\boxed{x\leq 0\text{ megoldások}}$,

II. ha pedig $3^x\geq 8$, akkor $3^x-5\geq 3>0$ miatt azon x értékek lesznek megoldások, melyekre $9^x+8-3^{x+2}>9^x-10\cdot 3^x+25$,

ebből rendezés után kapjuk, hogy $3^x>17$ ($3^x\geq 8$ is teljesül) $\Rightarrow \quad \boxed{x>\log_3 17}$.

b.) $4^x-4^{\sqrt{x}+1}=3\cdot 2^{x+\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2-4\cdot(2^{\sqrt{x}})^2=3\cdot 2^x\cdot 2^{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow$ ($2^x\cdot 2^{\sqrt{x}}$ -nel osztva az egyenletet)

$\dfrac{2^x}{2^{\sqrt{x}}}-4\cdot\dfrac{2^{\sqrt{x}}}{2^x}=3 \quad \Rightarrow \quad \left(u:=\dfrac{2^x}{2^{\sqrt{x}}}>0\right) \quad u-4\cdot\dfrac{1}{u}=3 \quad \Rightarrow \quad u^2-3u-4=0$, gyökök 4 és -1 ,

de csak a pozitív gyök lehet: $\dfrac{2^x}{2^{\sqrt{x}}}=4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x-\sqrt{x}}=2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x-\sqrt{x}=2$, $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-2=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x}=2$ (a negatív -1 érték itt sem lehetséges) , tehát a megoldás: $\boxed{x=4}$.

c.) $\ln(x^2+x-6)=\ln\dfrac{x-2}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \ln((x+3)\cdot(x-2))=\ln\dfrac{x-2}{x+3}$ ($x<-3$ vagy $x>2$) $\Rightarrow \quad (x+3)\cdot(x-2)=\dfrac{x-2}{x+3}$

$\Rightarrow \quad (x+3)^2=1 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-4}$ (az $x=-2$ érték nem megoldás, az egyenlet itt nem értelmezett !)

d.) $3^{x-1}+3^{x}+3^{x+1}=39 \iff 3^{x}\cdot\left(\frac{1}{3}+1+3\right)=39 \iff 3^{x}\cdot\frac{13}{3}=39 \iff 3^{x}=9 \Rightarrow \boxed{x=2}$.

e.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}} \iff \frac{2x+3}{2x-1} = 2\cdot\frac{x+9}{2x+2} \Rightarrow (2x+3)\cdot(x+1)=(2x-1)\cdot(x+9) \iff$

$2x^{2}+5x+3 = 2x^{2}+17x-9 \Rightarrow 12x=12 \Rightarrow \boxed{x=1}$.

f.) $\sqrt{\frac{2}{3}-5x} - \sqrt{3x+\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}-5x = 3x+\frac{1}{2} \Rightarrow 8x=\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{48}}$.

3. a.) $2(\lg 2-1)+\lg(x^{3}+1) = \lg\left(\frac{5}{x^{3}}+3\right) \iff -2\cdot\lg 5+\lg(x^{3}+1) = \lg\left(\frac{5}{x^{3}}+3\right) \iff x^{3}+1 = 25\cdot\left(\frac{5}{x^{3}}+3\right) \Rightarrow$

$x^{6}-74x^{3}-125=0 \Rightarrow x^{3}=\frac{74\pm\sqrt{74^{2}+4\cdot125}}{2} = \frac{74\pm\sqrt{5976}}{2} = 37\pm\sqrt{1494}$ etc ... $x=4.229354006054621\ldots$
(a negatív érték nem megf.)

b.) $\sqrt{x+6-4\cdot\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\cdot\sqrt{x+2}} = 1 \iff \sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^{2}} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^{2}} = 1 \iff$

$\left|\sqrt{x+2}-2\right| + \left|\sqrt{x+2}-3\right| = 1 \Rightarrow u:=\sqrt{x+2}, \quad |u-2|+|u-3|=1$.

Ha $0\le u<2$, akkor az egyenlet: $-(u-2)-(u-3)=1 \iff 2u=4,\ u=2$, így itt nem kapunk gyököt,

Ha $2\le u<3$, akkor az egyenlet: $(u-2)-(u-3)=1$, $(1=1)$, így ezesetben a gyökök: $2\le u<3$,

Ha $3\le u$, akkor az egyenlet: $(u-2)+(u-3)=1$, $\iff 2u=6,\ u=3$.

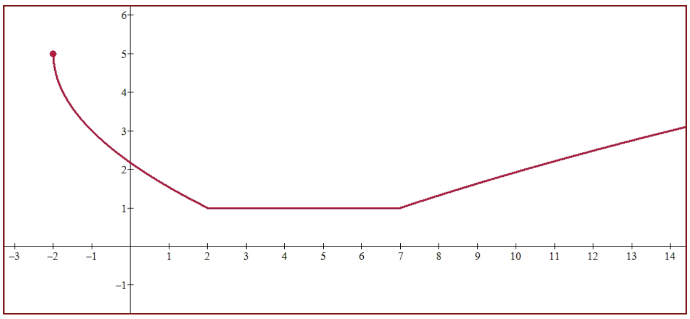
$\Rightarrow$ a gyökök: $2\le u\le 3 \Rightarrow 2\le\sqrt{x+2}\le 3 \iff 4\le x+2\le 9$.

Az egyenlet gyökei tehát: $\boxed{2\le x\le 7}$.

Megj. :

Az $f(x)=\left|\sqrt{x+2}-2\right| + \left|\sqrt{x+2}-3\right|$

függvény grafikonja :



c.) $(x+2)\cdot\sqrt{x^{2}-2x+3}\ \ge 0 \Rightarrow$ A négyzetgyök alatti másodfokú függvény diszkriminánsa $D=2^{2}-4\cdot3<0$,

így a bal oldal nemnegatív pontosan akkor, ha $x+2\ge 0$, azaz: $\boxed{x\ge -2}$.

d.) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$ ($x\le\frac{9}{5}$ és $x<3 \Rightarrow x\le\frac{9}{5}$) $\Rightarrow 9-5x = 3-x+\frac{36}{3-x}+12$

$\Rightarrow 2x+3 = \frac{18}{x-3} \Rightarrow 2x^{2}-3x-27=0 \Rightarrow x_{12}=\frac{3\pm\sqrt{3^{2}+4\cdot2\cdot27}}{4}=\frac{3\pm15}{4}$, $\boxed{x=-3}$ a másik gyök nem megf .

e.) $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad (x \geq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 2)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{x+1}-1+3}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{x-2+3}{x-2}$ $\Leftrightarrow$

$1+\dfrac{3}{\sqrt{x+1}-1} = 1+\dfrac{3}{x-2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{1}{x-2}$ $\Rightarrow$ $x-2 = \sqrt{x+1}-1$ $\Leftrightarrow$ $x-1 = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow$ $x^2-2x+1 = x+1$ $\Rightarrow$ $x^2-3x = 0$ $\Rightarrow$ $x\cdot(x-3) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=3}$ (a 0 nem megfelelő) .

---

f.) $3^{2x^2+2x-12} = 9^{(x-2)/(x+3)}$ $\quad (x \neq -3)$ $\Leftrightarrow$ $2x^2+2x-12 = 2\cdot\dfrac{x-2}{x+3}$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x-6 = \dfrac{x-2}{x+3}$

$\Leftrightarrow$ $x \neq -3$ és $(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+3) = x-2$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 2}$ gyök, és további megoldást $(x+3)^2 = 1$ -ből kapunk :

$|x+3| = 1$ $\Leftrightarrow$ $x+3 = 1$ vagy $x+3 = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 = -2\ ,\quad x_3 = -4}$ gyökök .

---

g.) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\log_3(\log_4 x) = 1$ $\Leftrightarrow$ $\log_4 x = 3$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = 4^3 = 64}$.

---

4. Rakjuk nagyság szerinti sorrendbe az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül :

a.) $\lg\sqrt[3]{1000} = 1$, $\quad \log_2 0{,}25 = \log_2\dfrac{1}{4} = -2$, $\quad \log_3\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\dfrac{1}{3}$, $\quad \ln\dfrac{1}{e^4} = -4$, $\quad 10^{\lg 5} = 5$

$\Rightarrow$ $\ln\dfrac{1}{e^4} = -4$ $<$ $\log_2 0{,}25 = -2$ $<$ $\log_3\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\dfrac{1}{3}$ $<$ $\lg\sqrt[3]{1000} = 1$ $<$ $10^{\lg 5} = 5$

---

b.) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}\right]^4 = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$, $\quad 0{,}25^{\log_2 3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2 3} = \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 3}\right]^2 = \dfrac{1}{9}$,

$3^{\log_{1/3} 2} = 3^{-\log_3 2} = \dfrac{1}{2}$, $\quad e^{\ln 4} = 4$, $\quad 2^{\log_2 5} = 5$

$\Rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = \dfrac{1}{625}$ $<$ $0{,}25^{\log_2 3} = \dfrac{1}{9}$ $<$ $3^{\log_{1/3} 2} = \dfrac{1}{2}$ $<$ $e^{\ln 4} = 4$ $<$ $2^{\log_2 5} = 5$

---

c.) $3^{2-\log_3 10} = \dfrac{9}{10}$, $\quad (\sqrt{2})^{3-\log_2 5} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{10}}{10}$, $\quad 8^{\log_2 6-2} = \dfrac{6^3}{8^2} = 6\cdot\left(\dfrac{6}{8}\right)^2 = \dfrac{27}{8}$,

$2^{2\cdot\log_2 3} = 3^2 = 9$, $\quad (2^{\log_2 3})^2 = 9$

$\Rightarrow$ $3^{2-\log_3 10} = \dfrac{9}{10}$ $<$ $(\sqrt{2})^{3-\log_2 5} = \dfrac{4\cdot\sqrt{10}}{10}$ $<$ $8^{\log_2 6-2} = \dfrac{27}{8}$ $<$ $2^{2\cdot\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 9$

---

5. Számítsuk ki x értékét :

a.) $\lg x = \lg 1{,}2 + \lg 1{,}5 - \lg 0{,}9 = \lg\dfrac{1{,}2\cdot 1{,}5}{0{,}9} = \lg 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 2}$.

---

b.) $\ln x = 2\cdot\ln 5 - 2 = \ln 5^2 - \ln e^2 = \ln\dfrac{25}{e^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = \dfrac{25}{e^2}}$.

---

c.) $\ln x = 3\cdot\log_2 8 - \dfrac{1}{2}\cdot\log_{1/2} 16 = 3\cdot 3 - \log_{1/2} 4 = 9 + \log_2 4 = 9+2 = 11$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = e^{11}}$.
