1. Töltsük ki az alábbi táblázatot :

φ	0^0	30^0	60^0	45^0	90^0	135^0	180^0	210^0	240^0	270^0	315^0	300^0	360^0
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
$\text{tg}\,\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$		-1	$-\sqrt{3}$	0

2. Határozzuk meg a hiányzó értékeket a φ meghatározása nélkül :

$\sin\varphi$	$\frac{3}{4}$	$\pm\sqrt{1-\frac{25}{144}}$	$\frac{8}{17}$	$\pm\frac{35}{12}\cdot\frac{12}{37}=\pm\frac{35}{37}$	$\pm\sqrt{1-\frac{3969}{4225}}$	$\pm\frac{21}{\sqrt{400+441}}$
$\cos\varphi$	$\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}$	$\frac{5}{12}$	$\pm\sqrt{1-\frac{64}{289}}$	$\pm\frac{12}{\sqrt{144+1225}}=\pm\frac{12}{37}$	$\frac{63}{65}$	$\pm\frac{20}{\sqrt{400+441}}$
$\text{tg}\,\varphi$	$\pm\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}$	$\pm\frac{\sqrt{119}}{12}\cdot\frac{12}{5}$	$\pm\frac{8}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{225}}=\pm\frac{8}{15}$	$\frac{35}{12}$	$\pm\frac{16}{65}\cdot\frac{65}{63}$	$\frac{21}{20}$

$$\cos^2\rho + \sin^2\rho = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 + \text{tg}^2\rho = \frac{1}{\cos^2\rho} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\rho = \frac{1}{1+\text{tg}^2\rho}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket :

a.) $\sin 2\rho = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\rho = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

b.) $\cos 2\rho = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\rho = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

c.) $\text{tg}\, 2\rho = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\rho = k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = k\cdot\frac{\pi}{2}\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

d.) $\text{tg}\, 2\rho = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\rho = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

e.) $\sin 2\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2\rho = \frac{\pi}{3}$ vagy $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi\ , \quad \rho = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

f.) $\text{ctg}\, 3\rho = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 3\rho = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{3}\ , \quad k\in\mathbf{Z}}$.

g.) $\cos 2\rho = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad 2\rho = \frac{\pi}{3}$ vagy $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi\ ,\quad \rho = \frac{5\pi}{6} + k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

h.) $\operatorname{ctg} 3\rho = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\rho = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{18} + k\cdot\frac{\pi}{3}\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

i.) $\sin \frac{\rho}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = (4k+1)\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

j.) $\cos \frac{\rho}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = (2k+1)\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

k.) $\operatorname{tg} \frac{\rho}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

l.) $\operatorname{tg} \frac{\rho}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{2} + 3k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

m.) $\cos \frac{\rho}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \frac{\pi}{3}$ vagy $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{2\pi}{3} + 4k\cdot\pi\ ,\quad \rho = \frac{10\pi}{3} + 4k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

n.) $\operatorname{ctg} \frac{\rho}{3} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{2} + 3k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

o.) $\sin \frac{\rho}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \frac{\pi}{3}$ vagy $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{2\pi}{3} + 4k\cdot\pi\ ,\quad \rho = \frac{4\pi}{3} + 4k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

p.) $\operatorname{ctg} \frac{\rho}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} = \operatorname{arc\,ctg}\ 0.5 + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = 2\cdot\operatorname{arc\,ctg}\ 0.5 + 2k\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket :

a.) $\sin^2 \rho = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \rho = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

b.) $\cos^2 \rho = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \rho = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

c.) $\operatorname{tg}^2 \rho = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \rho = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

d.) $\sin \rho = \operatorname{ctg} \rho \quad \Leftrightarrow \quad \sin \rho = \frac{\cos \rho}{\sin \rho} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2 \rho = \cos \rho \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 \rho + \cos \rho - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \cos \rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mert -1 nél kisebb érték) $\boxed{\rho = \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k \in \mathbf{Z}}$.

e.) $\sin\rho = -\operatorname{ctg}\rho \iff \sin\rho = -\dfrac{\cos\rho}{\sin\rho} \implies 1-\cos^2\rho = -\cos\rho \iff \cos^2\rho - \cos\rho - 1 = 0 \implies$

$\implies \cos\rho = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mert 1 nél nagyobb érték) $\boxed{\rho = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

f.) $\cos\rho = \operatorname{tg}\rho \iff \cos\rho = \dfrac{\sin\rho}{\cos\rho} \implies 1-\sin^2\rho = \sin\rho \iff \sin^2\rho + \sin\rho - 1 = 0 \implies$

$\implies \sin\rho = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mert -1 nél kisebb érték)

$\boxed{\rho = \arcsin\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\cdot\pi \quad \text{és} \quad \rho = -\arcsin\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + (2k+1)\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

5. Fejezzük ki $\forall\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$ esetén :

a.) $\boxed{\sin\rho \text{ -t } \operatorname{tg}\rho \text{ segítségével}}$ $\quad \sin^2\rho = \dfrac{\sin^2\rho}{\cos^2\rho + \sin^2\rho} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\rho}{1+\operatorname{tg}^2\rho} \implies \boxed{\sin\rho = \dfrac{\operatorname{tg}\rho}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\rho}}}$.

b.) $\boxed{\cos\rho \text{ -t } \operatorname{tg}\rho \text{ segítségével}}$ $\quad \cos^2\rho = \dfrac{\cos^2\rho}{\cos^2\rho + \sin^2\rho} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\rho} \implies \boxed{\cos\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\rho}}}$.

c.) $\boxed{\operatorname{tg}\rho \text{ -t } \sin\rho \text{ segítségével}}$ $\quad \operatorname{tg}^2\rho = \dfrac{\sin^2\rho}{\cos^2\rho} = \dfrac{\sin^2\rho}{1-\sin^2\rho} \implies \boxed{\operatorname{tg}\rho = \dfrac{\sin\rho}{\sqrt{1-\sin^2\rho}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\rho} - 1}}}$.

d.) $\boxed{\operatorname{tg}\rho \text{ -t } \cos\rho \text{ segítségével}}$ $\quad \operatorname{tg}^2\rho = \dfrac{\sin^2\rho}{\cos^2\rho} = \dfrac{1-\cos^2\rho}{\cos^2\rho} \implies \boxed{\operatorname{tg}\rho = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\rho}}{\cos\rho} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\rho} - 1}}$.

6. Adjuk meg az α értékét, ha :

a.) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\ ,\quad \sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \boxed{\alpha = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

b.) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \iff \boxed{\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

c.) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ és α a harmadik síknegyedben van $\iff \boxed{\alpha = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

7. Hozzuk egyszerűbb alakra :

a.) $\sin\rho\cdot(\operatorname{tg}\rho + \operatorname{ctg}\rho) + \cos\rho\cdot(\operatorname{tg}\rho + \operatorname{ctg}\rho) = \left(\dfrac{\sin\rho}{\cos\rho} + \dfrac{\cos\rho}{\sin\rho}\right)\cdot(\sin\rho + \cos\rho) =$

$= \dfrac{\sin^2\rho + \cos^2\rho}{\sin\rho\cdot\cos\rho}\cdot(\sin\rho + \cos\rho) = \dfrac{\sin\rho + \cos\rho}{\sin\rho\cdot\cos\rho} = \boxed{\dfrac{1}{\cos\rho} + \dfrac{1}{\sin\rho}}$.

b.) $(\sin\rho - \cos\rho)\cdot(1+\sin\rho\cdot\cos\rho) + (\sin\rho + \cos\rho)\cdot(1-\sin\rho\cdot\cos\rho) =$

$= (\sin\rho - \cos\rho)\cdot(\sin^2\rho + \sin\rho\cdot\cos\rho + \cos^2\rho) + (\sin\rho + \cos\rho)\cdot(\sin^2\rho - \sin\rho\cdot\cos\rho + \cos^2\rho) =$

$= (\sin^3\rho - \cos^3\rho) + (\sin^3\rho + \cos^3\rho) = \boxed{2\cdot\sin^3\rho}$.

Megj.: A fenti feladatot máképpen is megoldhattuk volna, pl. :

$$(\sin\rho-\cos\rho)\cdot(1+\sin\rho\cdot\cos\rho)+(\sin\rho+\cos\rho)\cdot(1-\sin\rho\cdot\cos\rho) =$$
$$=\sin\rho\cdot(1+\sin\rho\cdot\cos\rho+1-\sin\rho\cdot\cos\rho)-\cos\rho\cdot(1+\sin\rho\cdot\cos\rho-1+\sin\rho\cdot\cos\rho) =$$
$$=2\cdot\sin\rho-2\cdot\cos\rho\cdot\sin\rho\cdot\cos\rho = 2\cdot\sin\rho\cdot(1-\cos^2\rho) = \boxed{2\cdot\sin^3\rho}\ .$$

8. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét :

a.) $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{4}+\sqrt[5]{\sin(-7\pi)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+5\pi\right)+\sqrt[5]{0} = 1\ .$

b.) $\log_\pi\left[\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2-\sin\frac{4\pi}{3}\right]=\log_\pi\left[1+2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right]=\log_\pi\left[1+\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right] = 0\ .$

9. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a megadott intervallumokon :

a.) $8\cos 2x+7\cos^2 x=5\sin x+\frac{27}{4}\ ,\qquad x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow\quad 8(\cos^2 x-\sin^2 x)+7\cos^2 x=5\sin x+\frac{27}{4}\quad\Leftrightarrow\quad 15\cdot(1-\sin^2 x)-8\cdot\sin^2 x-5\cdot\sin x-\frac{27}{4}=0\quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad 23\cdot\sin^2 x+5\cdot\sin x-\frac{33}{4}=0\ \Rightarrow\ \sin x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+23\cdot 33}}{2\cdot 23}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+33\cdot33-10\cdot33}}{2\cdot 23}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-2\cdot5\cdot33+33^2}}{2\cdot 23}=$

$=\frac{-5\pm\sqrt{(5-33)^2}}{46}=\frac{-5\pm(33-5)}{46}\quad\Rightarrow\quad$ **I.** $\sin x=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},}\qquad$ **II.** $\sin x=-\frac{33}{46}\quad\Rightarrow\quad x\notin[0,\pi]\ .$

b.) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x=4\ ,\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}=4\ .$ Felhasználva, hogy $\forall p\in\mathbf{R}^+\quad p+\frac{1}{p}\ge 2$ és egyenlő pontosan akkor, ha $p=\frac{1}{p}$:

$\left(\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)+\left(\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}\right)\ \ge\ 4\ ,$ hiszen $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ esetén $\operatorname{tg}x>0\ .$

Az egyenlet bal oldala tehát pontosan akkor 4, ha $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\quad\left(\Leftrightarrow\ \operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}\right)$, azaz ha $\operatorname{tg}x=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\frac{\pi}{4}}\ .$

c.) $\sqrt{1-\cos^2 x}-\cos 2x=0\ ,\qquad x\in[0,2\pi]$

$\Leftrightarrow\quad |\sin x|-(\cos^2x-\sin^2x)=0\quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2x+|\sin x|-1=0\ .$

I. Ha $\sin x\ge 0$, azaz $x\in[0,\pi]$ vagy $x=2\pi$, akkor az egyenlet : $2\sin^2x+\sin x-1=0\quad\Rightarrow$

$\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot2}}{4}$, ebből csak a nemnegatív $\frac{1}{2}$ gyököt véve : $\boxed{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}}\ .$

II. Ha $\sin x<0$, azaz $x\in(\pi,2\pi)$, akkor az egyenlet : $2\sin^2x-\sin x-1=0\quad\Rightarrow$

$\sin x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot2}}{4}$, ebből csak a negatív $-\frac{1}{2}$ gyököt véve : $\boxed{x=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}}\ .$

10. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket :

a.) $\sin x+\cos^3x=\cos x+\sin^3x\quad\Leftrightarrow\quad\cos^3x-\sin^3x=\cos x-\sin x\quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad(\cos x-\sin x)\cdot(\cos^2x+\cos x\cdot\sin x+\sin^2x)=\cos x-\sin x\quad\Leftrightarrow\quad(\cos x-\sin x)\cdot(1+\cos x\cdot\sin x)=\cos x-\sin x\ .$

I. Ha $\cos x-\sin x=0$, akkor az egyenlőség teljesül, így $\cos x=\sin x$ -ből a megoldások : $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}\ .$

II. Ha $\cos x-\sin x\ne 0$, akkor $1+\cos x\cdot\sin x=1\quad\Leftrightarrow\quad\cos x\cdot\sin x=0\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{x=k\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\quad k\in\mathbf{Z}}\ .$

Megj.: A fenti feladatot máképpen is megoldhattuk volna, pl. :

$$\sin x+\cos^3 x = \cos x+\sin^3 x \iff \sin x\cdot(1-\sin^2 x) = \cos x\cdot(1-\cos^2 x) \iff \sin x\cdot\cos^2 x = \cos x\cdot\sin^2 x \;.$$

I. Ha $\cos x\cdot\sin x=0$, akkor az egyenlőség teljesül, így ezesetben a megoldások : $\boxed{x=k\cdot\frac{\pi}{2}\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

II. Ha $\cos x\cdot\sin x\neq 0$, akkor az egyenletet leosztva ezen szorzattal : $\cos x=\sin x \iff \boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

---

b.) $3\cos 2x=-\sin x+3 \iff 3(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\sin x+3 \iff 3-6\sin^2 x=-\sin x+3 \iff 6\sin^2 x=\sin x$.

I. Ha $\sin x=0$, akkor az egyenlőség teljesül, így megoldások : $\boxed{x=k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

II. Ha $\sin x\neq 0$, akkor $\sin x=\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{x=\arcsin\frac{1}{6}+2k\cdot\pi \quad \text{és} \quad x=-\arcsin\frac{1}{6}+(2k+1)\cdot\pi\;,\; k\in\mathbf{Z}}$.

---

c.) $4\cos^2 x+8\sin x+1=0 \iff 4(1-\sin^2 x)+8\sin x+1=0 \iff 4\sin^2 x-8\sin x-5=0 \Rightarrow \sin x=$

$=\frac{8-\sqrt{8^2+4\cdot4\cdot5}}{8}=1-\frac{\sqrt{2^2+5}}{2}=-\frac{1}{2}$, (a másik gyök nem megfelelő, u.i. 1 nél nagyobb érték) $\Rightarrow \boxed{x=\frac{7\pi}{6},\;\frac{11\pi}{6}+2k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

---

d.) $\sin 2x\cdot(\cos 2x+1)+\sin x\cdot(\cos 2x-5)=0 \iff 2\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos 2x+1)+\sin x\cdot(\cos 2x-5)=0$.

I. Ha $\sin x=0$, akkor az egyenlőség teljesül, így megoldások : $\boxed{x=k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

II. Ha $\sin x\neq 0$, akkor $2\cos x\cdot(\cos 2x+1)+\cos 2x-5=0 \iff 2\cos x\cdot(2\cdot\cos^2 x)+2\cdot\cos^2 x-6=0 \iff$

$\iff 2\cos^3 x+\cos^2 x-3=0 \iff 2\cdot(\cos^3 x-1)+(\cos^2 x-1)=0 \iff$

$\iff (\cos x-1)\cdot(2\cdot(\cos^2 x+\cos x+1)+(\cos x+1))=0 \Rightarrow$ felhasználva, hogy $\sin x\neq 0$ miatt $\cos x\neq 1$:

$\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x+3=0$, ezen egyenletnek azonban nincsen valós megoldása, hiszen a diszkrimináns negatív.

---

11. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket :

a.) $\cos x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\sin x+\sin 2x=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos^2 x=1 \iff$

$\iff \sin x\cdot\cos x\cdot(1+2\cos x)=0 \Rightarrow (\cos x\neq 0\;!)$ **I.** $\sin x=0$: $\boxed{x=k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

II. $1+2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3},\;\frac{4\pi}{3}+2k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

---

b.) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{4} \iff$

$\sin^4 x+\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^4+\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^4=\frac{5}{4} \iff$

$\sin^4 x+\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{5}{4} \iff 4\sin^4 x+(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=5$

$\iff 4\sin^4 x+2\cdot(\sin^4 x+6\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x)=5 \iff 4\sin^4 x+8\sin^2 x\cdot\cos^2 x+2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=5 \iff$

$\iff 4\sin^4 x+8\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)=3$. $u:=\sin^2 x \Rightarrow 4u^2-8u+3=0$, $u=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{4}=2\pm 1$

$\Rightarrow \sin^2 x=1$ (a másik gyök nem megfelelő) $\Rightarrow |\sin x|=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\;,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

c.) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x} = 1 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$ (az egyenlet értelmezési tartományán azonosság) $\Rightarrow$ $\boxed{x \in \mathbf{R} \setminus \{\ k \cdot \dfrac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}\ \}}$.

12. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül :

a.) $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 15^\circ) = \dfrac{1}{4}$

b.) $\sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(30^\circ + 15^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c.) $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d.) $\sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 110^\circ = \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot (\cos 70^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ) =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot (\cos 70^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ) = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(70^\circ - 40^\circ)) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

e.) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f.) $\cos^2 22{,}5^\circ = \dfrac{1 + \cos(2 \cdot 22{,}5^\circ)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$