1. Legyen (a_n) számtani sorozat, $a_5 = 17$, $a_7 = 10$. A.) $a_1 = ?$, B.) $d = ?$, C.) $\sum_{i=1}^{8} a_i = ?$

$a_7 = a_5 + 2d \Rightarrow 2d = 10 - 17 \Rightarrow d = -3.5$, $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_1 = 17 - 4\cdot(-3.5) = 31$,

A számtani sorozat: $31,\ 27.5,\ 24,\ 21.5, \ldots$. $\sum_{i=1}^{8} a_i = \frac{a_1 + a_8}{2}\cdot 8 = (\,31 + (10 - 3.5)\,)\cdot 4 = 150$.

2. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe $150\ \text{cm}^2$. Mekkorák az oldalak ?

Legyen a hosszabbik befogó A, ekkor a másik befogó $A-d$, az átfogó $A+d$. $\Rightarrow$ $A\cdot(A-d) = 300$ (kétszeres terület),

$A^2 + (A-d)^2 = (A+d)^2$ (Pythagoras-tétel) $\Rightarrow$ $2A^2 - 2A\cdot d + d^2 = A^2 + 2A\cdot d + d^2 \Rightarrow A^2 = 4A\cdot d \Rightarrow A = 4d$.

$\Rightarrow 4d\cdot 3d = 300 \Rightarrow 4d^2 = 100 \Rightarrow d = 5$. **A háromszög oldalai:** $3d,\ 4d,\ 5d$, azaz $15,\ 20,\ 25$ cm .

3. Legyen (a_n) számtani sorozat, $d = 0.5$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 38$, $\sum_{i=1}^{n+4} a_i = 69$. Mennyi A.) $a_1 = ?$ B.) $n = ?$

$\Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 69 - 38 = 31 \Rightarrow (a_n + d) + (a_n + 2d) + (a_n + 3d) + (a_n + 4d) = 31 \Rightarrow 4a_n + 10d = 31 \Rightarrow$

$4a_n = 31 - 5 = 26 \Rightarrow a_n = 6.5$. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 38 \Rightarrow \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = 38 \Rightarrow (6.5 - (n-1)\cdot 0.5 + 6.5)\cdot n = 76 \Rightarrow$

$(13.5 - n\cdot 0.5)\cdot n = 76 \Rightarrow n^2 - 27n + 152 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4\cdot 152}}{2} = \frac{27 \pm 11}{2}$. $\Rightarrow$

Megoldások : **I.** $n = 19$, $a_1 = -2.5$, A sorozat: $-2.5,\ -2.0,\ -1.5, \ldots$. **II.** $n = 8$, $a_1 = 3$, A sorozat: $3,\ 3.5,\ 4, \ldots$.

4. Legyen (a_n) számtani sorozat, $a_1 + a_2 + a_3 = -12$, $a_1\cdot a_2\cdot a_3 = 80$. Határozza meg a sorozat első három tagját !

$(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = -12 \Rightarrow 3a_2 = -12 \Rightarrow a_2 = -4 \Rightarrow (-4-d)\cdot(-4)\cdot(-4+d) = 80 \Rightarrow 16 - d^2 = -20 \Rightarrow d^2 = 36$

$\Rightarrow$ **Megoldások :** **I.** $d = 6$, $a_1 = -10$, $a_2 = -4$, $a_3 = 2$; **II.** $d = -6$, $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = -10$.

5. Legyen (a_n) mértani sorozat, $a_1 + a_2 + a_3 = 39$, $a_1\cdot a_2\cdot a_3 = 729$. Határozza meg a sorozat első három tagját !

$\frac{a_2}{q}\cdot a_2\cdot(a_2\cdot q) = 729 \Rightarrow {a_2}^3 = 729 \Rightarrow a_2 = 9 \Rightarrow \frac{9}{q} + 9 + (9\cdot q) = 39 \Rightarrow 3 - 10q + 3q^2 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{5 \pm 4}{3}$

$\Rightarrow$ **Megoldások :** **I.** $q = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$; **II.** $q = \frac{1}{3}$, $a_1 = 27$, $a_2 = 9$, $a_3 = 3$.

6. Legyen (a_n) mértani sorozat.
A.) $a_2 = 3$, $a_6 = 12$, $S_{10} = ?$ **B.)** $a_3 = 3$, $a_9 = 24$, $S_{12} = ?$ **C.)** $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$, $a_1 = ?$ $q = ?$

A.) $a_6 = a_2\cdot q^4 \Rightarrow 12 = 3\cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt{2}$, $S_{10} = a_1\cdot\frac{q^{10} - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 3\cdot\frac{2^5 - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{93\cdot(2 + \sqrt{2})}{2}$.

B.) $a_9 = a_3\cdot q^6 \Rightarrow 24 = 3\cdot q^6 \Rightarrow q = \sqrt{2}$, $S_{12} = a_1\cdot\frac{q^{12} - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2})^{12} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3\cdot(2^6 - 1)\cdot(\sqrt{2} + 1)}{2\cdot(2-1)} = \frac{189\cdot(\sqrt{2} + 1)}{2}$.

C.) $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow 2a_2 + a_2\cdot q = a_2\cdot(2 + q) = 0 \Rightarrow q = -2$ (u.i. $a_2 \neq 0$). $-6 = a_4 - a_2 = a_2\cdot q^2 - a_2 = a_2\cdot(q^2 - 1)$

$\Rightarrow a_2\cdot(4 - 1) = -6 \Rightarrow a_2 = -2$. **Megoldás :** $a_1 = 1$, $q = -2$. A sorozat : $1,\ -2,\ 4,\ -8, \ldots$.

7. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, második és ötödik egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Határozza meg, hogy mennyi az a_1, a d és a q !

$$25 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 5a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 5 \ .$$

$$\frac{a_3 - d}{a_3 - 2d} = \frac{a_3 + 2d}{a_3 - d} \quad \Rightarrow \quad (a_3 - d)^2 = a_3^2 - 4d^2 \quad \Rightarrow \quad 5d^2 - 2a_3 \cdot d = 0 \quad \Rightarrow \quad d \cdot (5d - 2a_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad d \cdot (5d - 10) = 0 \quad \Rightarrow$$

I. $d = 0$, ekkor a sorozat **konstans sorozat**, minden tag 5, $q = 1$. **II.** $d = 2$, $a_1 = 1$, $q = 3$. **A sorozat :** $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$.

8. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az elsőhöz 6-ot, másodikhoz 13-at és a harmadikhoz 30-at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a számtani sorozat ?

$21 = a_1 + a_2 + a_3 = (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 3a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 7$. A mértani sorozat második tagja $a_2 + 13 = 20$, az első három tagjának összege pedig $21 + (6 + 13 + 30) = 70$, így $\dfrac{20}{q} + 20 + 20q = 70$, $\Rightarrow$ $2q^2 - 5q + 2 = 0$, $q_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$.

Megoldások : **I.** $q = 2$, $a_1 = 10 - 6 = 4$. A számt. sorozat: $4, 7, 10, \ldots$ **II.** $q = \dfrac{1}{2}$, $a_1 = 40 - 6 = 34$. A számt. sorozat: $34,\ 7,\ -20,\ \ldots$

9. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat ?

A módosítás után kapott számtani sorozat első három tagjának összege $3a_2 = 63 + (3 - 30)$. $\Rightarrow$ $a_2 = 12$. $\Rightarrow$ A mértani sorozatra :

$\dfrac{12}{q} + 12 + 12q = 63$, $\Rightarrow$ $4q^2 - 17q + 4 = 0$, $q_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \dfrac{17 \pm 15}{8}$. $\Rightarrow$ **Megoldások :** **I.** $q = 4$, $a_1 = 3$,

A mértani sorozat: $3,\ 12,\ 48, \ldots$ (Számtani: $6,\ 12,\ 18, \ldots$) **II.** $q = \dfrac{1}{4}$, $a_1 = 48$, A mértani sorozat: $48,\ 12,\ 3, \ldots$ (Számt.: $51,\ 12,\ -27, \ldots$)

10. Egy számtani sorozat 12. tagja, valamint az első n tagjának az összege is 0. A sorozat első $(2n - 1)$ darab tagjának az összege 495.
($\Rightarrow$ A sorozat nem a konstans zero sorozat .) Adja meg a sorozat első $3n$ tagjának az összegét !

$$a_1 = a_{12} - 11 \cdot d = -11 \cdot d \ , \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 0 \ , \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 11 \cdot d \ ; \quad a_n = -11 \cdot d + (n - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad n = 23 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{45} a_i = \frac{-11d + (-11d + 44d)}{2} \cdot 45 = 495 \quad \Rightarrow \quad 11d \cdot 45 = 495 \quad \Rightarrow \quad 11d = 11, \quad d = 1 \ ;$$ (**A számtani sorozat** : $-11, -10, -9, \ \ldots$)

Megoldás : $$\sum_{i=1}^{3n} a_i = \sum_{i=1}^{69} a_i = \frac{-11 + (-11 + 68)}{2} \cdot 69 = 23 \cdot 69 = 1587 \ .$$

11. Egy (a_n) számtani sorozatban $a_1 = \sqrt{2}$. Az a_1, a_2, a_4 ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja.
Adja meg a mértani sorozat első 10 tagjának összegét !

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{2} + d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 3d}{\sqrt{2} + d} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2} + d)^2 = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 3d) \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \cdot d + d^2 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot d \quad \Rightarrow \quad d \cdot (d - \sqrt{2}) = 0 \ .$$

I. $d = 0$, ekkor a sorozat konstans sorozat, minden tag $\sqrt{2}$, $q = 1$, a számtani sorozat egyben mértani sorozat is, $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$.

II. $d = \sqrt{2}$, $q = 2$. A számt. sorozat: $\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}, \ldots$ a mértani sorozatra pedig: $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (\sqrt{2} \cdot 2^{i-1}) = \sqrt{2} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023 \cdot \sqrt{2}$.

12. Egy számtani sorozat első négy tagja a_1, a_2, a_3, a_4. Az a_1, a_2, a_3+5, a_4+20 számok egy mértani sorozat első négy tagjának reciprokjaival egyenlők. Határozza meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát !

Legyen a mértani sorozat (b_n) , ekkor $b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2},\ b_3 = \frac{1}{a_3+5},\ b_4 = \frac{1}{a_4+20}$ és $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}$;

$\Rightarrow$ felhasználva, hogy (a_n) számtani sorozat : $q = \frac{a_2-d}{a_2} = \frac{a_2}{a_2+d+5} = \frac{a_2+d+5}{a_2+2d+20}$ $\Rightarrow$

Két egyenlőséget írunk fel : $(a_2-d)\cdot(a_2+d+5) = a_2^{\,2}$, $a_2\cdot(a_2+2d+20) = (a_2+d+5)^2$.

Az első egyenletből : $(a_2^{\,2}-d^2)+5\cdot(a_2-d) = a_2^{\,2}$ $\Rightarrow$ $5a_2 = d^2+5d$.

A második egyenletből : $2\cdot a_2\cdot(d+10) = 2\cdot a_2\cdot(d+5)+(d+5)^2$ $\Rightarrow$ $2\cdot 5\cdot a_2 = (d+5)^2$.

$\Rightarrow$ $2\cdot(d^2+5d) = (d+5)^2$ $\Rightarrow$ $2d^2+10d = d^2+10d+25$ $\Rightarrow$ $d^2 = 25$.

Megoldás :

I $d=-5$, $5a_2 = (-5)^2+5\cdot(-5) = 0$, ez nem lehetséges $a_2 = \frac{1}{b_2}$ miatt ,

II. $d=5$, $5a_2 = 5^2+5\cdot 5 = 50$, $a_2 = 10$, $q = \frac{1}{2}$,

a számtani sorozat: $5,\ 10,\ 15,\ 20, \dots$,

a mértani sorozat: $\frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{40}, \dots$.