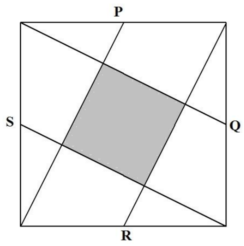
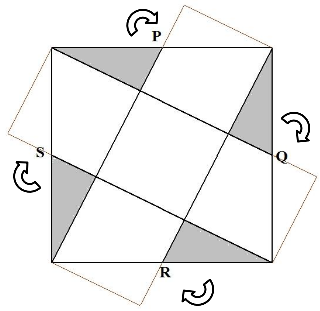
1. Mekkora a satírozott rész területe,
ha a $P,\ Q,\ R,\ S$ pontok
az egységnyi oldalú négyzet oldalfelző pontjai ?



Átdarabolással :

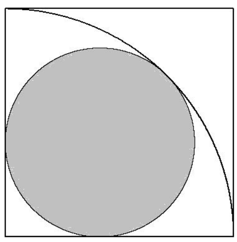


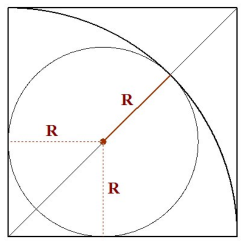
A satírozott kis egybevágó derékszögű háromszögeket a nyilak irányában kiforgatva
egy kereszt alakban elrendezett 5 db kis négyzetből álló síkidomot kapunk, melynek területe 1.

Így a középső négyzet területe = $\dfrac{1}{5}$ területegység.

2. Mekkora az ábrán látható satírozott körlemez sugara,
ha a négyzet oldala egységnyi hosszúságú ?

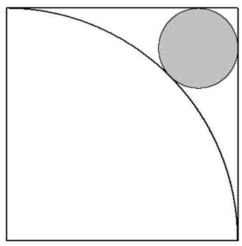
a.) $R\cdot\sqrt{2}+R=1 \quad\Rightarrow\quad R=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

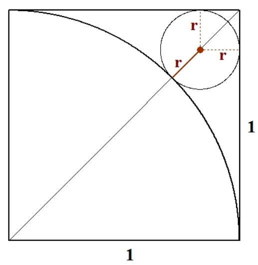




b.) $r\cdot\sqrt{2}+r=\sqrt{2}-1 \quad\Rightarrow\quad r=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad r=1-2\cdot(\sqrt{2}-1)=1-2R$





3. Írjunk fel egy olyan összefüggést, amelynek segítségével a megadott adatokból a kérdéses érték kiszámítható **:**

Ismert	**Számítandó**	**Összefüggés**
Egy háromszög két oldala : a, b és a közbezárt szög : γ	A háromszög területe	$T=\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$
Egy szabályos háromszög, melynek oldala : a	Terület	$T=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
	magasság	$m=\dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$
Egy szabályos háromszög, melynek magassága : m	Terület	$T=\dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$
	oldalhossz	$a=\dfrac{2\cdot m}{\sqrt{3}}$

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 41 cm , területe 180 cm². Mekkorák a befogók **?**

Legyenek a befogók a, b . Ekkor $T = \dfrac{a \cdot b}{2}$ $\Rightarrow$ $a \cdot b = 2 \cdot 180$, $b = \dfrac{360}{a}$. A Pythagoras-tétel szerint ekkor

$$a^2 + \frac{360^2}{a^2} = 41^2 \quad \Rightarrow \quad a^4 - 41^2 \cdot a^2 + 360^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{41^2 \pm \sqrt{41^4 - 4 \cdot 360^2}}{2} = \frac{41^2 \pm \sqrt{(41^2 - 2 \cdot 360) \cdot (41^2 + 2 \cdot 360)}}{2} =$$

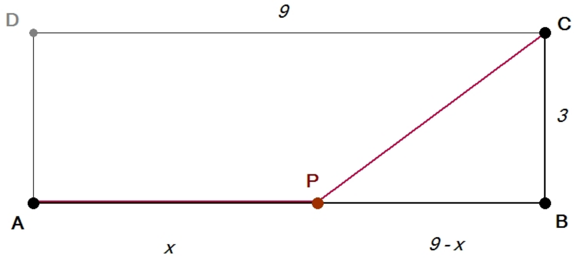
$$= \frac{1681 \pm \sqrt{(1681 - 720) \cdot (1681 + 720)}}{2} = \frac{1681 \pm \sqrt{961 \cdot 2401}}{2} = \frac{1681 \pm \sqrt{31^2 \cdot 49^2}}{2} = \frac{1681 \pm 31 \cdot 49}{2} = \frac{1681 \pm 1519}{2} \quad \Rightarrow$$

I. $a = \sqrt{\dfrac{1681 + 1519}{2}} = \sqrt{1600} = 40$, $b = 9$, **II.** $a = \sqrt{\dfrac{1681 - 1519}{2}} = \sqrt{81} = 9$, $b = 40$.

A háromszög befogói tehát 9 cm és 40 cm hosszúak

.

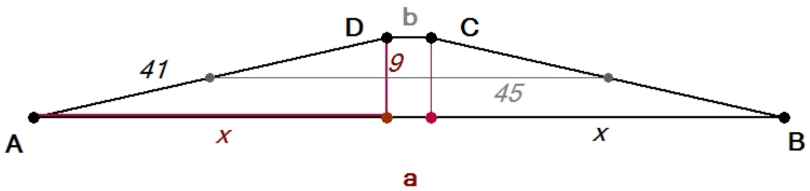
5. Egy téglalap oldalai **AB** = 9 cm, **BC** = 3 cm.
Az **AB** oldalnak melyik **P** pontja van **A**-tól és **C**-től egyenlő távolságra **?**



$x =$ **AP** $=$ **PC** $= \sqrt{3^2 + (9 - x)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3^2 + 9^2 - 18x + x^2$

$18x = 90 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 5}$.

6. Mekkorák a szimmetrikus trapéz alapjai, ha középvonala 45 mm, szára 41 mm, magassága 9 mm **?**



$x^2 + 9^2 = 41^2 \quad \Rightarrow$

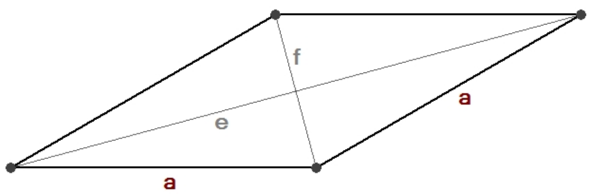
$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{(41 - 9) \cdot (41 + 9)} = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$

$2x + 2b = 2 \cdot 45 \quad \Rightarrow \quad b = 45 - x = 5$, $a = 2x + b = 85$

A trapéz alapjai tehát 85 mm és 5 mm hosszúak

.

7. Az egységnyi területű rombusz egyik szöge 150° . Mekkorák a rombusz oldalai és átlói **?**



$a^2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \dfrac{1}{\sin 30^\circ} = 2$, $a = \sqrt{2}$.

$(\dfrac{e}{2})^2 + (\dfrac{f}{2})^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad e^2 + f^2 = 4 \cdot 2$. $e \cdot f = 2$.

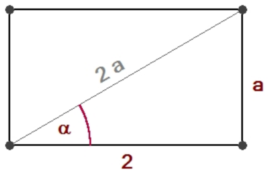
$e^2 + f^2 = 8$; $e^2 \cdot f^2 = 4$ $\Rightarrow$ e^2 és f^2 a $z^2 - 8 \cdot z + 4 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei.

$z = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 4} = 4 \pm 2 \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}}$, $f = \sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}}$

A rombusz oldalai $\sqrt{2}$, átlói $\sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}}$ és $\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}}$ egységnyiek

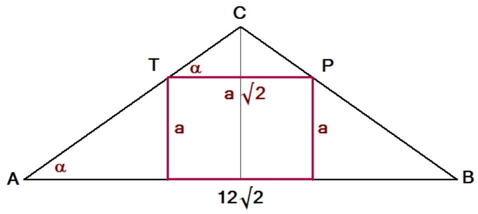
.

8. Egy téglalap egyik oldala 2 cm. A téglalap átlójának mérőszáma megegyezik területének mérőszámával.
Bizonyítsa be, hogy a téglalap átlója az egyik oldallal 30°-os szöget zár be !



$T = 2a$, $\sin\alpha = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 30^\circ$.

9. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12 dm, magassága 6 dm.
Mekkora annak a kockának az éle, amelynek négy csúcsa a gúla alapján, másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélein van **?**



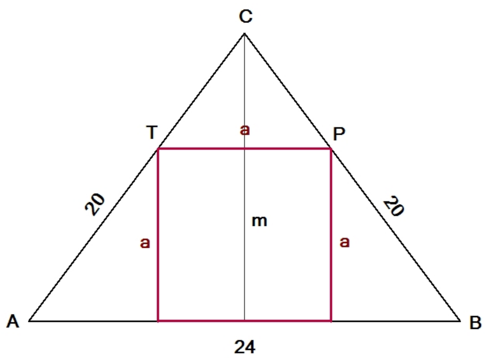
A gúla alapnégyzetének átlójára illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkmetszetnek az ábra szerinti jelöléseit alkalmazva :

Az $ABC\,\Delta$ és a $TPC\,\Delta$ hasonlósága miatt

$$\frac{12\cdot\sqrt{2}}{6} = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{6-a} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot(6-a) = a \quad\Rightarrow\quad a = 4$$

$\boxed{\text{A kocka éle } a = 4 \text{ dm}}$.

10. Egy forgáskúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója 20 cm. A kúpba azzal közös tengelyű, egyenlő oldalú hengert írunk.
Mekkora a henger térfogata **?** (Az egyenlő oldalú henger tengelymetszete négyzet.)



A forgáskúp (és egyben a beírt henger) tengelyére illeszkedő (tetszőleges) síkmetszet esetén az ábra szerinti jelöléseket alkalmazva :

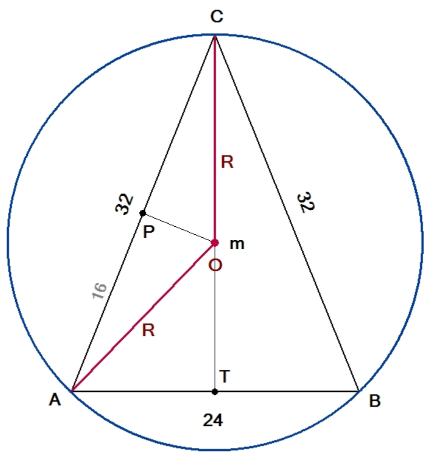
Az $ABC\,\Delta$ és a $TPC\,\Delta$ hasonlósága miatt

$$\frac{m}{24} = \frac{m-a}{a} \;,\; \text{ahol } m = \sqrt{20^2-12^2} = 4\cdot\sqrt{5^2-3^2} = 4\cdot\sqrt{16} = 16 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{16}{24} = \frac{16-a}{a} \quad\Rightarrow\quad 2a = 48-3a \quad\Rightarrow\quad a = \frac{48}{5} = 9.6 \;.$$

$\boxed{\text{A henger térfogata } V = \dfrac{4.8^2\cdot\pi\cdot 9.6}{3} = 4.8^2\cdot\pi\cdot 3.2 \approx 232 \text{ cm}^3}$.

11. Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írt egyenes körkúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója pedig 32 cm **?**



A körkúp tengelyére illeszkedő (tetszőleges) síkmetszet esetén az ábra szerinti jelöléseket alkalmazva :

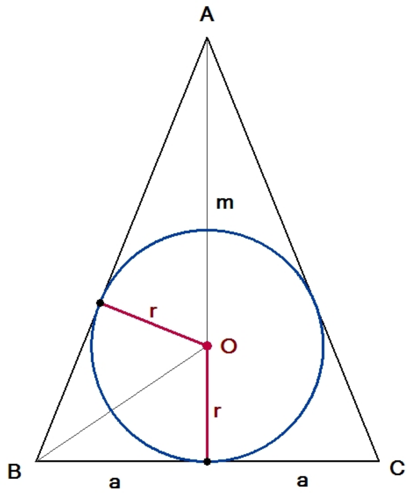
Az $AOP\,\Delta$ és a $CAT\,\Delta$ hasonlósága miatt

$$\frac{R}{16} = \frac{32}{m} \;,\; \text{ahol } m = \sqrt{32^2-12^2} = 4\cdot\sqrt{8^2-3^2} = 4\cdot\sqrt{55} \quad\Rightarrow$$

$$m\cdot R = 16\cdot 32 \quad\Rightarrow\quad R = \frac{16\cdot 32}{m} = \frac{16\cdot 32}{4\cdot\sqrt{55}} = \frac{128}{\sqrt{55}}$$

$\boxed{\text{A gömb térfogata } V = \dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{128}{\sqrt{55}}\right)^3\cdot\pi \approx 21536 \text{ cm}^3}$.

12. Írjon egy forgáskúpba érintőgömböt! Számítsa ki a gömb és a kúp térfogatának az arányát !



Legyen a forgáskúp alapkörének sugara a, magassága m
a kúpba írt érintőgömb sugara r.

A térbeli konfiguráció az ábra szerinti $ABC\Delta$ -nek és a beírt körének az m magasság körüli forgatásával származtatható.

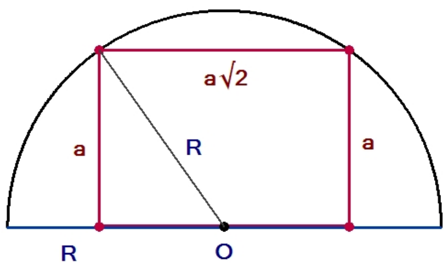
A beírt kör (gömb) sugara a háromszög területének és a félkerületnek a hányadosa :

$r = \dfrac{a \cdot m}{a + \sqrt{a^2 + m^2}}$, így a forgáskúp és a gömb térfogatának hányadosa :

$$\frac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \cdot \frac{3}{4 \cdot \left(\dfrac{a \cdot m}{a + \sqrt{a^2 + m^2}} \right)^3 \cdot \pi} = \frac{\left(a + \sqrt{a^2 + m^2} \right)^3}{4 \cdot a \cdot m^2}$$

Speciális estben, ha az $ABC\Delta$ szabályos, akkor $\dfrac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \dfrac{\left(a + \sqrt{a^2 + 3a^2} \right)^3}{4 \cdot a \cdot 3a^2} = \dfrac{(a + 2a)^3}{12a^3} = \dfrac{9}{4}$.

13. Egy félgömbbe kockát helyezünk el úgy, hogy négy csúcsa határkörének síkjába, négy csúcsa pedig a félgömbre essék. Mekkora a félgömb sugara , ha a kocka éla a **?**



A kocka alapnégyzetének átlójára illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkmetszetnek az ábra szerinti jelöléseit alkalmazva **:**

$$R^2 = \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 \quad \Rightarrow \quad R = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

A félgömb sugara **:** $R = a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.