

## 1. gyakorlat Deriválás alkalmazásai II.

1.  $f(x) = \frac{3}{x} - 3x^{\frac{5}{3}} + 7\sqrt[3]{x}$
2.  $f(x) = (3x^7 - 8x^2) \sin x$
3.  $f(x) = \frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}$
4.  $\frac{x^2 - x}{5}$
5.  $\sqrt{\frac{1}{x^2}} \sqrt{x}$
6.  $\frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$
7.  $\frac{\sin x}{x + \cos x}$
8.  $\sqrt[3]{3x - 2x^2}$
9.  $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
10.  $\log_2(\sin x)$
11.  $\log_2(\sin^3 x)$
12.  $\log_2(\sin x^3)$
13.  $\log_2(\sin x^3 + \sin^3 x)$
14.  $\ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
15.  $\sin^3 3x^3$
16.  $\ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$
17.  $\ln x \operatorname{tg} x$
18.  $a^{\ln x}$
19.  $\ln(\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x})$
20.  $e^{2x^2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
21.  $\frac{x^2}{e^{3x}}$

További feladatok:

22.  $\sqrt[3]{4x^2 + 2^x + \operatorname{tg} 3x}$
23.  $\frac{(x^3 + 5x^2 + 6x) \ln x}{\cos 2x + 10}$
24.  $\sqrt{2x^3 + e^{-x^2}}$
25.  $\frac{(x^2 + \sqrt{x}) \cos x}{5 + \operatorname{tg} 3x}$
26.  $\frac{e^{-x} + e^{x^2}}{e^{-x} - e^{x^2}}$

27.  $e^{e^{e^x}}$
28.  $e^{e^{e^x + x + 1} + e^x + x + 1}$
29.  $\ln(\ln(\ln x))$
30.  $\ln(\ln(\ln x) + e^{x + \ln x})$
31.  $\sqrt[4]{\operatorname{arctg}(x^2 + \cos(x^2)) - \ln(x^2 + \cos(x^{-1}))}$
32.  $\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{\sqrt{5 \ln x + 6 \sin 7x}}$
33.  $\frac{\operatorname{arctg}(3 \sin 3x)}{\operatorname{tg} 3x}$
34.  $(x - \cos x) 2^{x - \cos x}$
35.  $(x - \cos x) \log_2(x - \cos x)$
36.  $\sin \left( \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} \right)$
37.  $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$
38.  $\arcsin \sqrt{1 - x^2}$
39.  $\frac{\operatorname{arctg}(x^{1/3})}{\ln(1 + \ln(10 - 2^x))}$
40.  $2^{\frac{1-x}{1+x}}$
41.  $\frac{\sin(x^2 + 2x)}{\cos(x^2 + 2x + 1)}$
42.  $\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{1 + x^2} \right)$
43.  $\frac{1}{x} \operatorname{arctg}(x^{-1})$
44.  $\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cos(5x + \cos x) + \cos(\cos x)}{x}}$
45.  $\cos(\cos(\sin x + 1) + \sin(\cos x + x))$

Logaritmusos deriválás az érdekesség kedvéért:

46.  $x^{2x}$
47.  $x^{\sqrt{x}}$
48.  $x^{\operatorname{tg} x}$
49.  $(\cos x)^{\sin x}$
50.  $(\ln x)^{\ln x}$
51.  $x^{a^x}$
52.  $\left(\frac{x}{e}\right)^x$
53.  $(x^x)^x$

### Házi feladatok:

54. Hatványfüggvények.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , ez alapján:

(a)  $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7$

(b)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7x + 6$

(c)  $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 7$

(d)  $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{2x} = 4x^{\frac{3}{2}} - 3(2x)^{\frac{1}{2}}$

(e)  $f(x) = \frac{3}{x} - 3x^{\frac{5}{3}} + 7\sqrt[3]{x}$

55. Szorzat alakúak.  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , ez alapján:

(a)  $f(x) = (2x + 5)(3x^7 - 8x^2)$

(b)  $f(x) = (5x - 7)\sqrt{2x^5}$

(c)  $f(x) = (3x^7 - 8x^2) \sin x$

(d)  $f(x) = (3x^3 - 8x^2)(\sin x - \cos x)$

56. Hányados alakúak.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ , ez alapján:

(a)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{1 + 2x}$

(b)  $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 2x}$

(c)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 4}{\cos x}$

(d)  $f(x) = \frac{x^2 \tan x}{2 + \cos x}$

(e)  $f(x) = \frac{4}{(1 - x^2)(1 - 3x^2)}$

(f)  $f(x) = \frac{x^3 + 3}{(x^2 + x + 1) \sin x}$

(g)  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(1 - x^2)\sqrt{x}}$

(h)  $f(x) = \frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}$

57. Vegyes feladatok.

58.  $f(x) = x^3 \ln x$

59.  $f(x) = e^x(3x^2 - 4x)$

60.  $f(x) = x \sin x \ln x$

61.  $f(x) = 2^x \sin x \log_2 x$

62.  $f(x) = 3^x(3x^7 - 8x^2 + 1)$

63.  $f(x) = \sin x^3$

64.  $f(x) = \tan(4x^2 + 1)$

65.  $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 3)$

66.  $f(x) = \sqrt[3]{x - 3x^5}$

Az eddigi házi feladatok megoldásai megtalálhatók a [http://www.math.bme.hu/~szbalazs/oktatas/m1/derivallas\\_gyakorlas.pdf](http://www.math.bme.hu/~szbalazs/oktatas/m1/derivallas_gyakorlas.pdf) címen. További feladatok:

67.  $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$

68.  $\operatorname{tg}^2 x^2$

69.  $\sqrt{2x - \sin 2x}$

70.  $(5x^6 - 8x^2)^{10}$

71.  $\sin \frac{2+3x}{1+x^2}$

72.  $\frac{\cos x^3}{2 + \sin^4 x}$

73.  $\cos \frac{2+x}{2^x}$

74.  $10^{\sin x}$

75.  $10^{\sin^2 x}$

76.  $10^{\sin x^2}$

77.  $\lg(\sin x)$

78.  $\sqrt{\operatorname{tg} x^2}$

79.  $e^{\sqrt{x-1}}$

80.  $\operatorname{tg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

81.  $\arcsin \sqrt{1-x^2}$

82.  $\arccos \sqrt{x+1}$

83.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Deriválás alkalmazásai:

1. Az  $y = x^2 + 4x + 3$  parabola mely pontjában lesz az érintő meredeksége  $\frac{1}{2}$ ? Hol metszi az ehhez a ponthoz húzott érintő a koordináta tengelyeket?

2. Az  $y = \frac{1}{x^2} + 2$  hiperbola mely pontjában lesz az érintő meredeksége  $-\frac{1}{4}$ ? Hol metszi az ehhez a ponthoz húzott érintő az  $x$  tengelyt?

3. Írjuk fel az  $y = \cos\left(\frac{3\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$  függvény  $x_0 = 1$  helyhez tartozó érintőjére merőleges, az érintési ponton áthaladó egyenes egyenletét.

4. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az  $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$  függvény  $x_0 = 1$  helyhez tartozó érintőjére és átmegy az érintési ponton. Hasonló feladat:

$y = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $x_0 = 2$ , átmegy a  $(6, 3)$  ponton.

$y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x_0 = 1$ , átmegy a  $(0, 10)$  ponton.

$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $x_0 = 1$ , átmegy a  $(-\sqrt{2}, 3)$

5. Írjuk fel az  $y = \cos\left(\frac{3\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$  függvény  $x_0 = 1$  helyhez tartozó érintőjének egyenletét! Hasonló feladatok:  
 $y = \operatorname{tg}(\arccos x)$ ,  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. Meghatározandó az  $y = \sin x$  függvény grafikonját a  $\left(\frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$  pontban érintő egyenes egyenlete.
7. Az  $y = xe^{-x^2}$  függvény görbéjének mely pontjaiban vízszintes az érintő?
8. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely érinti az  $y = \ln \frac{3}{x^2}$  függvény görbét és párhuzamos a  $3y + 2x + 5 = 0$  egyenletű egyenessel.
9. A  $y = \operatorname{tg}x$  függvény mely pontjában lesz az érintő meredeksége 2?
10. Az  $f(x) = \operatorname{arctg}x$  függvény mely pontjában lesz az érintő meredeksége 2?
11. Az  $y = \frac{x}{1-x^2}$  függvény görbéjének mely pontjaiban lesz az érintőnek az  $x$ -tengellyel bezárt szöge  $45^\circ$ ?
12. Határozzuk meg a  $\frac{9}{2}$  térfogatú, szabályos hatszög alapú hasábok közül a minimális felszínűnek az oldalait.
13. Határozzuk meg az egységnyi térfogatú, szabályos háromszög alapú, felül nyitott hasábok közül azt, amelynek minimális a felülete.
14. Határozzuk meg a szabályos háromszögből kivágható legnagyobb területű téglalap méreteit. Tegyük fel, hogy a téglalap egy oldala a háromszög egy oldalán fekszik.
15. Határozzuk meg az  $R$  sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger sugarát és magasságát.
16. Határozzuk meg az egység sugarú gömbbe írható, maximális térfogatú kúp adatait.
17. Határozzuk meg egy kúpba (alapkör sugara  $R$ , magassága  $M$ ) írható maximális térfogatú henger adatait.
18. Az  $r = 4$  cm sugarú félkörbe az átmérőn fekvő trapézt rajzolunk. Hogyan kell a trapéz adatait megválasztani, hogy a területe maximális legyen?
19. Az  $y = \frac{x^2}{8}$  parabola mely pontja van legközelebb a  $(0, 6)$  ponthoz?
20. Vízszintes terepen állva a vízszintessel  $\alpha$  szöget bezáró irányban elhajítunk egy követ.  $\alpha$  mely értéke mellett fog tőlünk legtávolabb leesni a kő?
21. (\*) Két ember egy vízszintes helyzetben lévő létrát visz. Derékszögben hajló folyosón legfeljebb milyen hosszú létrával tudnak bekanyarodni, ha a folyosók szélessége 3m és 5m?