Állapítsa meg, hogy a következő egyenletrendszernek λ mely értére van megoldása, mely értére van egyértelmű megoldása illetve végtelen sok megoldása és adja meg a megoldásokat!

$$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1$$
$$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$$
$$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda$$

Megoldás: Először írjuk fel az egyenletrendszer kibővített együttható mátrixát, ami annyit jelent, hogy az ismeretlenek együtthatóit mátrixba rendezzük és az egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansokkal – mint utolsó oszloppal – kibővítettük.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right)$$

Majd próbáljuk elemi sorműveletek segítségével a mátrixot olyan alakúvá változtatni, hogy az együttható mátrix minden oszlopában csak egy 1-es legyen, a többi 0 legyen.

Elemi sorműveleten azt értjük, hogy egy tetszőleges sort konstanssal megszorzunk, vagy az egyik sorhoz egy másik konstans szorosát hozzáadjuk.
Jelöljük a sorokat így: első sor, S1, második sor S2, harmadik sor, S3, negyedik sor S4.

Például azt a művelet, hogy a harmadik sor 3 szorosát kivonjuk a második sorból, jelöljük így: $S2 - 3 \cdot S3$

FONTOS! Az ötödik oszlop elemivel pontosan ugyanazokat a műveleteket hajtsuk végre, mint a sorának a többi elemével.

Ez megfelel annak, mintha az egyenleteket konstansokkal szoroznánk és egymáshoz hozzáadnánk, ami a megoldások halmazát nem változtatja meg.
A ~ jel azt jelenti, hogy a módosított együtthatókkal vett egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, mint az eredetinek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim$$

Például az első sor első helyén 1-est úgy állíthatunk elő, hogy a teljes sor megszorozzuk $\frac{1}{5}$ -el, jelben $\frac{1}{5} \cdot S1$

Majd az első sor 4 szeresét kivonjuk a második sorból, hogy a második sor elő eleme 0-legyen, jelben

$S2 - 4 \cdot S1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -2-4\left(-\frac{3}{5}\right) & 3-4\left(\frac{2}{5}\right) & 7-4\left(\frac{4}{5}\right) & 1-4\left(\frac{3}{5}\right) \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \text{S3-8S1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -6+\frac{24}{5} & -1-\frac{16}{5} & -5-\frac{32}{5} & 9-8\cdot\left(\frac{3}{5}\right) \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \text{S4-7S1} \sim$$

Majd az első sor 8-szorosát vonjuk ki a harmadik sorból, hogy az első sor harmadik eleme is 0 legyen, jelben: S3-8S1

Majd a második és a harmadik sort 5-el megszorozva kapjuk,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -6 & -21 & -57 & 21 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & 5\lambda-21 \end{array}\right) \sim \text{S4+S3} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -6 & -21 & -57 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\lambda \end{array}\right)$$

Az utolsó sor mutatja, hogy csak $\lambda = 0$ esetén van megoldás, hiszen

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5\lambda$, Behelyettesítve $\lambda = 0$ t a következőt kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -6 & -21 & -57 & 21 \end{array}\right) \sim S4\cdot\frac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \end{array}\right) \sim S4+S3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$S2\cdot\frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim S1+\frac{3}{5}S2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5}+\frac{21}{10} & \frac{4}{5}+\frac{57}{10} & \frac{3}{5}-\frac{21}{10} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{25}{10} & \frac{65}{10} & -\frac{15}{10} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Az eljárást tovább nem lehet folytatni, mert az utolsó sorban nem lehet 1-et előállítani, hiszen minden elem 0

Tehát az eredeti egyenletrendszer ekvivalens az utolsó együttható mátrix-al felírt rendszerrel, azaz

$x_1+\frac{25}{10}x_3+\frac{65}{10}x_4=-\frac{15}{10}$ azaz $x_1=-\frac{25}{10}x_3-\frac{65}{10}x_4-\frac{15}{10}$

$x_2+\frac{7}{2}x_3+\frac{19}{2}x_4=-\frac{7}{2}$ azaz $x_2=-\frac{7}{2}x_3-\frac{19}{2}x_4-\frac{7}{2}$

Tehát két kötött változó van, x_1, x_2, melyeket x_3 és x_4 segítségével fejezünk ki.
x_3, x_4 -t szabad változóknak nevezzük.

Az $x_3=p$, $x_4=q$ jelöléssel a megoldások:

$x_1=-\frac{25}{10}p-\frac{65}{10}q-\frac{15}{10}$, $x_2=-\frac{7}{2}p-\frac{19}{2}q-\frac{7}{2}$ ahol p és q tetszőleges valós számok.

Az egyenletrendszernek kétszeresen végtelen sok megoldása van

Például ha p=0 és q=1, akkor a megoldás

$x_1=-\frac{65}{10}-\frac{15}{10}=-\frac{80}{10}=-8$, $x_2=-\frac{19}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{26}{2}=-13$,

pl. $x_1=-8$ $x_2=-13$ $x_3=0$, $x_4=1$, $\lambda=0$

Ellenőrzés

$$5(-8)-3(-13)+2(0)+4(1)=3$$
$$4(-8)-2(-13)+3(0)+7(1)=1$$
$$8(-8)-6(-13)-(0)-5(1)=9$$
$$7(-8)-3(-13)+7(0)+17(1)=0$$

Megválaszthatjuk másképpen is a szabad változókat, pl. $x_3=1$, $x_4=0$, ekkor

$x_1=-\frac{25}{10}-\frac{15}{10}=-\frac{40}{10}=-4$, $x_2=-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=-7$, $x_3=1$, $x_4=0$,

$$5(-4)-3(-7)+2(1)+4(0)=3$$
$$4(-4)-2(-7)+3(1)+7(0)=1$$
$$8(-4)-6(-7)-(1)-5(0)=9$$
$$7(-4)-3(-7)+7(1)+17(0)=0$$

Tehát az egyenletrendszernek $\lambda=0$ esetén van csak megoldása, de akkor végtelen sok megoldása van, tehát nincs olyan λ érték melyre egyértelmű megoldása lenne.