12. egyenletrendszerek, lineáris összefüggőség, inverz mátrix

1.
$$\begin{aligned} 2x-y-z &= 4 \\ 3x+4y-2z &= 11 \\ 3x-2y+4z &= 11 \end{aligned}$$
(pontosan egy megoldás van)

2.
$$\begin{aligned} x+y+2z &= -1 \\ 2x-y+2z &= -4 \\ 4x+y+4z &= -2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 5 \\ 2x+3y+z &= 1 \\ 2x+y+3z &= 11 \end{aligned}$$
(pontosan egy megoldás van)

4. Az $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ egyenletrendszernek végtelensok megoldása van

5. Az $\begin{cases} 8x+3y-2z=5 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ egyenletrendszernek végtelensok megoldása van

6. Az $\begin{cases} 8x+3y-2z=5 \\ 2x-y+z=2 \\ 4x+5y-4z=2 \end{cases}$ egyenletrendszernek nincs megoldása

7. Adott egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációja a 4-dimenziós valós Euklideszi-térnek. A mátrixa a standard bázisban $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 13 & -5 \end{bmatrix}$. Adott továbbá egy $\underline{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}$ vektor szintén a standard bázisban. Határozzuk meg az összes olyan $\underline{x}$ vektort, amelynek $\mathcal{A}$ szerinti képe a $\underline{b}$ vektor!

8. Adott egy $\mathbf{A}$ lineáris transzformációja a 4-dimenziós térnek. A mátrixa a standard bázisban $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. Adott továbbá egy $\underline{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektor szintén a standard bázisban. Határozzuk meg az összes olyan $\underline{x}$ vektort, amelynek $\mathbf{A}$ szerinti képe a $\underline{b}$ vektor!

9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az alábbi mátrix egyenletek megoldását.

10. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

11. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ 9 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

13. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, azaz lineárisan független-e a mátrix oszlopaiból álló vektorrendszer?

Általánosabb feladatok

14. Adott egy p-től függő $\mathcal{A}_p$ lineáris transzformációja a 4-dimenziós valós Euklideszi-térnek. A mátrixa a standard bázisban $\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ 3 & 11 & 20 & -5 \\ -2 & 0 & -6 & -4 \\ 4 & 2 & 14 & p \end{bmatrix}$. Adott továbbá egy q-tól függő $\underline{b}_q = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ -8 \\ q \end{bmatrix}$ vektor szintén a standard bázisban.

    a) p és q mely értékei mellett lesz az $\mathbf{A}_p$ transzformáció képterére merőleges komponense a $\underline{b}_q$ vektornak?
    Azaz, az $\mathbf{A}_p\underline{x} = \underline{b}_q$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ egyenletnek milyen p, q értékek mellett nincs megoldása.

    b) Ha lehet, akkor állítsuk be a p és q paramétert úgy, hogy pontosan egy $\underline{x}$ vektornak legyen $\mathcal{A}_p$-szerinti képe $\underline{b}_q$.
    Azaz, az $\mathbf{A}_p\underline{x} = \underline{b}_q$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ egyenletrendszernek mikor van pontosan egy megoldása?

    c) A p paraméter mely értéke mellett képez $\mathcal{A}_p$ egy kisebb dimenziós altérbe, mint $\mathbb{R}^4$, továbbá a q mely értéke mellett lesz benne $\underline{b}_q$ ebben a képtérben?
    Azaz, p és q mely értékei mellett lesz az $\mathbf{A}_p\underline{x} = \underline{b}_q$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása.

    Mi lesz a megoldás $p = 20$ és $q = 20$ mellett?

15. Legyen adott egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés. A standard bázisban felírt mátrixa a következő $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg λ értékét úgy, hogy a $\underline{b}_\lambda = [3, 1, 9, \lambda]^T$ vektor benne legyen $\mathcal{A}$ képterében.

16. Határozzuk meg ϑ értékét úgy, hogy legyen megoldása az alábbi egyenletnek. Előfordulhat-e, hogy egy adott ϑ-hoz végtelen sok megoldás létezzen? $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Inverz meghatározása:

17. Az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ inverze

18. A $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix inverze

19. A $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverze

20. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & -14 \end{bmatrix}.$$

21. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

22. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 11 & 2 \\ -2 & 1 & 15 \end{bmatrix}.$$