1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+3}{2x-1}=\frac{4}{1}$, határozott alakú $\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2}=-\frac{3}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\frac{-6}{-2}=3$ határozott alakú $\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)-3)((x+3)-3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x((x+3)+3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)+3)}{1}=6$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin5x}{x}$ 2. táblázat 10. sor, precízen rendőrelvvel $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin5x}{x}\le\frac{1}{x}$

mivel mindkét oldal 0-hoz tart $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin5x}{x}=0$ (Korlátos függvény szorozva 0-hoz tartó függvénnyel 0-hoz tart)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{thx}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{thx}{x}=0$, mert $|thx|<1$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 2. táblázat 10. sor,

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg10x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg10x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg10x}\cdot\frac{10x}{5x}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{10x}{\sin10x}\cdot\frac{\cos10x}{2}=\frac{1}{2}$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x+2}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x+3}{x}\right)^x}{\left(\frac{x+2}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{e^3}{e^2}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=?$ $\quad\left(1^{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\cdot\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3+x}{x}}{\frac{1+x}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e^3}{e}=e^2$, valamint

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ rendőrelvvel

$(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}<\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}<(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x=e^2$ a feladat első része

alapján és $e^2\approx 7{,}3441$ és $\lim\limits_{x\to\infty}(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$, ezért a középső is 1-hez tart..

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=e^2\cdot 1=e^2$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1+\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=?$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=\infty$, nem határozatlan alakú, mert az alap 2-höz tart a kitevő pedig ∞,
(2. táblázatban 5.-sor)
precízen: ha $\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)\to 2$, akkor ha x elég nagy, akkor $\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)$>1,9 így

$$(1{,}9)^x < \left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x \text{ és } \lim_{x\to\infty}(1{,}9)^x = +\infty \text{, tehát } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x = \infty$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right) = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\,\frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{\left(\sqrt{16+x}\right)^2-16} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{16+x-16} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}+4}{1} = 8 =$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, tehát a szorzat határértéke 8.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = 1\cdot 0 = 0$$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right) = ?$ $(\infty-\infty)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4-x\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)} = \infty$$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right) = ?$ $(\infty-\infty)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{1}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\left(x^2+2\right)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(-2)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)} = 0$$

18. Állapítsuk meg a $y = \dfrac{5x^2-10x+5}{x^2+1}$ függvény határértékeit és ábrázoljuk!

$$y = \frac{5x^2-10x+5}{x^2+1} = \frac{5(x^2+1)-10x}{x^2+1} = 5-\frac{10x}{x^2+1}$$

$$y = 5-\frac{10x}{x^2+1}$$