Határozatlan határértékű alakok összefoglaló táblázata.

Határozatlan határértékű alakok:

Ha egy függvény $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ alakú és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ szimbolikusan $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

akkor a $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ nem egyértelműen meghatározott (határozatlan alakú).

A határérték az f(x) és g(x) függvénytől függ.

Hasonlóan kell érteni az alábbi táblázatban szereplő szimbólumokat.

A határozatlan alakokat határozott alakúvá kell alakítani úgy, hogy már ismert határérték függvénye legyen.

Ismertnek tételezzük a következő határértékeket:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ $\left(1^{\infty}\right)$ (a ∞ lehet akár $+\infty$ vagy $-\infty$)

valamint $\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\left(1^{\infty}\right)$ (a 0 lehet akár $+0$ vagy -0)

Szimbolikusan	1. példa	2. példa
$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-2} = -\dfrac{3}{2}$	
$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$	
$\left(\infty-\infty\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^4}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^4}+\sqrt{x}\right) = \infty$	
$\left(0\cdot\infty\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot 2\sqrt{x}\right) = 0$	
$\left(1^{\infty}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	
$\left(0^{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}x^x = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^x = 1$	
$\left(\infty^{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^{-x} = 1$	

Határozott határértékű alakok, konvergencia kritériumok

Szimbolikusan	A szimbólum tartalma	Példa
1. $\left(\frac{C}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló konstanshoz tart ($C\neq 0$) és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\sin\frac{1}{x}}=\infty$
2. $\left(\frac{C}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló konstanshoz tart és a nevező ∞.hez, akkor a tört -0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\ln x}=0$
3. $\left(\frac{\infty}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló végtelenhez tart és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{\sin\frac{1}{x}}=\infty$
4. $\left(\frac{0}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló 0.hoz tart és a nevező végtelenhez, akkor a tört - 0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\frac{x-1}{x^2}}=0$
5. $\left(C^{\infty}\right)=\infty$ (C>1)	Ha egy függvény alapja egynél nagyobb konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört ∞-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-7x+1}\right)^x=\infty$
6. $\left(C^{\infty}\right)=0$ (0<C<1)	Ha egy függvény alapja egynél kisebb pozitív konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^x=0$
7. $\left(\infty^{c}\right)=\infty$ (c>0)	Ha egy függvény alapja ∞-hez tart és a kitevője konstanshoz ami nagyobb mint 0, akkor a tört ∞ -hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{x-1}{3x}}=\infty$
8. $\left(C^{0}\right)=1$ (c>0)	Ha egy függvény alapja pozitív konstanshoz tart és a kitevője 0 -hoz, akkor a tört 1-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}=1$
9. $\left(0^{\infty}\right)=0$	Ha egy függvény alapja 0-hoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^3-7x+1}\right)^{3x}=1$
10 $\left(0\cdot korlátos\right)=0$	Ha egy szorzat egyik tényezője korlátos a másik pedig 0-hoz tart, akkor a szorzat 0.hoz tart.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

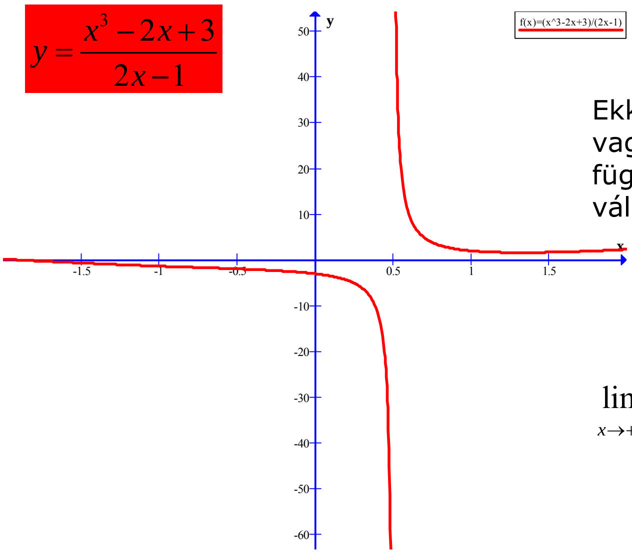
Gyakorló feladatok megoldással:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3}{2x-1}=?$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$ behelyettesítve x=1 et

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3}{2x-1}=\frac{4}{1}$$

2. $\lim\limits_{x\to +\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-2x+3}{2x-1}=?$ Határozott $\left(\dfrac{C}{0}\right)=\infty$ alakú, de pontosabban a kérdés azaz, hogy mennyi a határérték ha x jobbról tart az $\dfrac{1}{2}$-hez.

$$y=\frac{x^3-2x+3}{2x-1}$$



Ekkor azt kell megvizsgálni, hogy $+\infty$ vagy $-\infty$ hez tart a függvény. A függvény grafikonján látható, hogy a válasz az, hogy a függvény $+\infty$

$$\lim_{x\to +\frac{1}{2}}\frac{x^3-2x+3}{2x-1}=+\infty$$

Az ábra ismerete nélkül a függvény előjeléből lehet megállapítani ugyanezt. Azt kell mondani, hogy végtelenhez tart és ha $x>\dfrac{1}{2}$ akkor a függvény előjele pozitív (úgy állapíthatom meg, hogy behelyettesítek egy 1-nél nagyobb számot pl. x=1- t).

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2}=-\frac{3}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú, a számlálót és a nevezőt a leg „gyorsabban” ∞-hez tartóval azaz x^3-el osztva:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}$$ már határozott $\left(\dfrac{C}{0}\right)=\infty$ alakú, mert a számláló konstanshoz a nevező pedig 0-hoz tart. Az előjel pedig + behelyettesítéssel láthatjuk

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=+\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=?$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\frac{-10}{-2}=5$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)}{(x-1)}=-3$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^2-9}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{((x+3)-3)((x+3)-3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x((x+3)+3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{((x+3)+3)}{1}=6$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

A leggyorsabban ∞-hez tartóval x^2 el osztva a számlálót és a nevezőt

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-10}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$ már határozott $\left(\dfrac{0}{\infty}\right)=0$ alakú, azaz $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-10}{x^2-x-2}=0$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

A $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ságát úgy meg lehet szüntetni, hogy mind a számláló, mind a nevező konjugáltjával szorozzuk a számlálót is és a nevezőt is:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x-\left(1+x^2\right)\right)}{1+x-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)}{1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{2}{2}$$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5$, mert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$,

(precízen $a=5x$ helyettesítéssel ha $x\to 0$ akkor $a\to 0$ és $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a}{a}=1$)

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 5x}{x}=?$ Korlátos függvény szorozva 0-hoz tartó függvénnyel 0-hoz tart!

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin 5x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=0$

(precízen rendőrelvvel $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin 5x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ mivel mindkét oldal 0-hoz tart

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg10x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg10x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg10x}\cdot\frac{10x}{5x}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{10x}{\sin 10x}\cdot\frac{\cos 10x}{2}=\frac{1}{2}$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=?=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

A 16. példa eredményét felhasználva

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}x=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=?=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=?$ $\left(1^\infty\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{e}$$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)^x=?$ Az alap tart 2-höz a kitevő pedig ∞-hez, ez nem

határozatlan alakú, ez tart végtelenhez $\left(C^\infty\right)$ahol C>1,

precízen: ha $\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)\to 2$, akkor ha x elég nagy, akkor $\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)>1{,}9$ így

$$(1,9)^x < \left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x \text{ és } \lim_{x\to\infty}(1,9)^x = +\infty \text{, tehát } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x = \infty$$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+3x}\right)^x = ?$ Az alap $\frac{2}{3}$-hoz, egynél kisebb számhoz tart, a kitevő pedig ∞-hez, ez nem határozatlan alak, hanem ez mindig 0-hoz tart (határozott alakok táblázata 6. sor)

precízen rendőr elvvel: $0 < \left(\frac{2x}{1+3x}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = ?$ $\left(1^\infty\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3+x}{x}}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e} = e^2 \text{, valamint}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ rendőrelvvel

$$(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < \left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < (8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x = e^2$ a feladat első része alapján és $e^2 \approx 7,3441$ és $\lim\limits_{x\to\infty}(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty}(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$, ezért a középső is 1-hez tart..

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = e^2 \cdot 1 = e^2$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\ln(2x+1) = \lim_{x\to 0}\ln(2x+1)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}\right] = \ln(e) = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}=e$ precízen $\dfrac{1}{2x}=a$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a}=e$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{\left(\sqrt{16+x}\right)^2-16}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{16+x-16}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}+4}{1}=8=$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, tehát a szorzat határértéke 8.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=1\cdot 0=0$$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4-x\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\infty$$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{1}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\left(x^2+2\right)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-2)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=0$$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{thx}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{thx}{x}=0$, mert $|thx|<1$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 2. táblázat 10. sor,