Sorozat alapfeladatok

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{8n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{8}=\left((e)^{-1}\right)^{8}=\frac{1}{e^{8}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n}=e$ mert ez a 6. sorozat egy részsorozata, mely ezért a sorozat határértékéhez, azaz e-hez tart

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-3}{n^3+2}\right)^{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^3-3}{n^3}}{\frac{n^3+2}{n^3}}\right)^{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^3}\right)^{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}}=\frac{e^{-3}}{e^{2}}=\frac{1}{e^{6}}$

$(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^{n}=e^{A}$ alapján)

3. Vizsgálja meg monotonitás, korlátosság szempontjából a következő sorozatot! Konvergens-e? Ha igen, adjon meg az n_0 küszöböt, ha $\varepsilon=10^{-2}$!

$a_n=\frac{2n-3}{3-5n}$

Megoldás:

$a_1=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$, $a_3=\frac{3}{-12}=-\frac{1}{4}$

Megvizsgáljuk, hogy $\frac{2n-3}{3-5n}>\frac{2(n+1)-3}{3-5(n+1)}$ igaz-e!

$\frac{2n-3}{5n-3}>\frac{2(n+1)-3}{5(n+1)-3}$, $\frac{2n-3}{5n-3}>\frac{2n-1}{5n+2}$, $5n-3>0$, ha $n>\frac{3}{5}$, és $5n+2>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}^{+}$ alapján átalakítva az egyenlőtlenséget

$(2n-3)\cdot(5n+2)>(2n-1)\cdot(5n-3)$

$10n^2+4n-15n-6>10n^2+3-5n-6n$, innen

$-11n-6<3-11n$

$6>-3$ ami igaz, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken

Felső korlát például : $K_1=\frac{1}{2}$

Alsó korlát például : $K_2=-1$

A legnagyobb alsó korlát $K=-\frac{2}{5}$

$\frac{2n-3}{3-5n}>-\frac{2}{5}$

$10n-15<6+10n$

$-15<6$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3-5n}=-\frac{2}{5}$

$\left|\frac{2n-3}{3-5n}-\left(-\frac{2}{5}\right)\right|<0,01$

$\left|\frac{2n-3}{3-5n}+\frac{2}{5}\right|<0,01$ $\left|\frac{10n-15+6-10n}{5(3-5n)}\right|<0,01$

$\left|\frac{-9}{15-25n}\right|<0,01$, az abszolút értékben levő tört számlálója és nevezője is negatív, tehát a tört pozitív

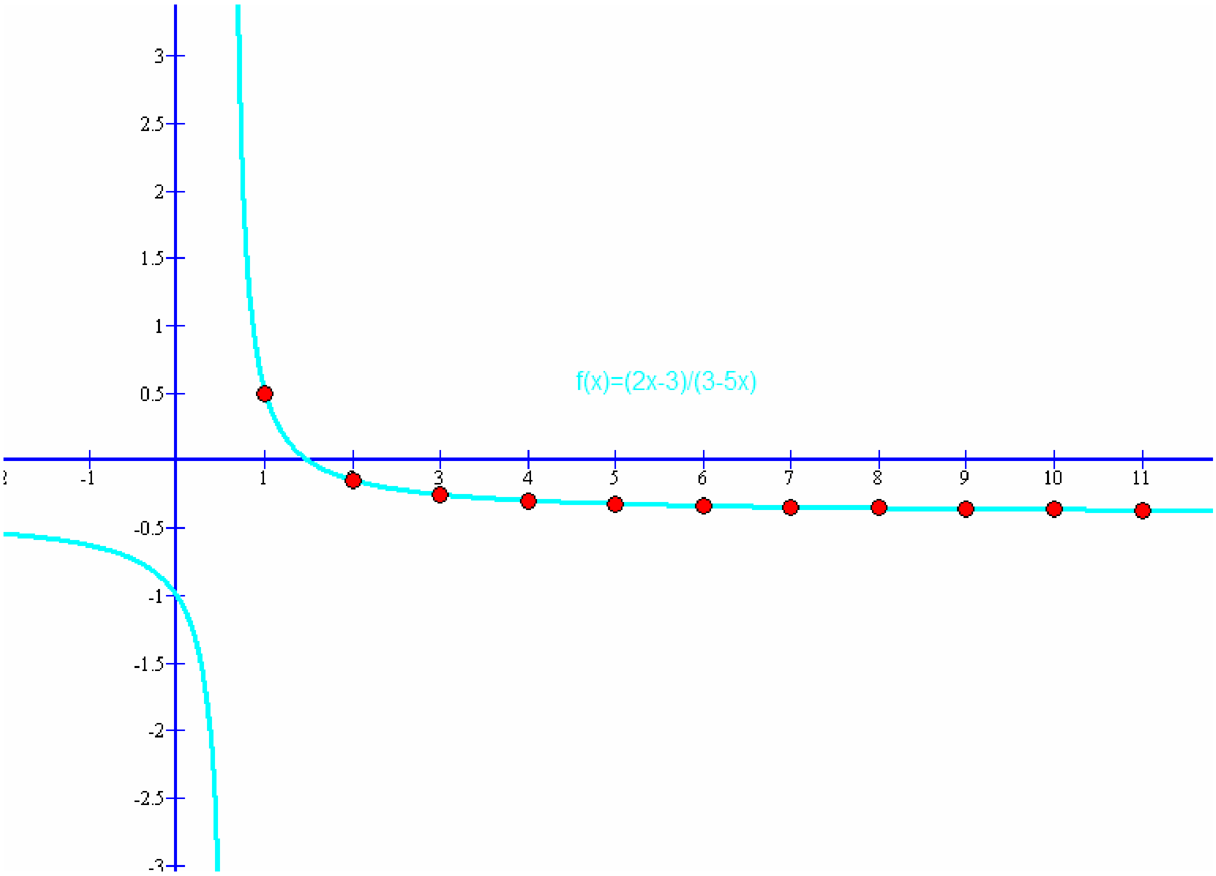
$\frac{-9}{15-25n}<0,01$

$-9>0,15-0,25n$

$0,25n>9,15$

$n>\frac{9,15}{0,25}$

$n>36,6$ $n_0=36$.



4. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, adja meg a határértéküket!

$$b_n = \sqrt{4n^2+4n+1} - \sqrt{4n^2-3n-2}$$

$$c_n = \frac{3^{n+2}\cdot 2^{n-3} - 7\cdot 5^n}{5\cdot 6^{n-1}+9}$$

$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3-2n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$b_n = \left(\sqrt{4n^2+4n+1} - \sqrt{4n^2-3n-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}}{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}} =$$

$$= \frac{4n^2+4n+1-4n^2+3n+2}{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}} = \frac{7+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}} \to \frac{7}{4}$$

$$c_n = \frac{3^{n+2}\cdot 2^{n-3} - 7\cdot 5^n}{5\cdot 6^{n-1}+9} = \frac{9\cdot 3^n\cdot\frac{2^n}{8} - 7\cdot 5^n}{\frac{5}{6}\cdot 6^n + 9} = \frac{\frac{9}{8} - 7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{5}{6}+9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n} \to \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{8}\cdot\frac{6}{5} = \frac{27}{20}$$

$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3-2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{7}{2n}\right)^n}{\left(-1\cdot\left(1-\frac{3}{2n}\right)\right)^n}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\frac{7}{2}}{n}\right)^n}{(-1)^n\cdot\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n}}$$

Ha n páros, a sorozat $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{e^5} = e^{\frac{5}{2}}$ határértékhez tart,

ha n páratlan $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{-e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{-e^{-5}}$ nem létezik a határérték.

Tehát a sorozatnak nincs határértéke.

5. Legyen $a_n = \frac{2n-1}{5n+2}$.

Határozza meg azt a legkisebb *N* természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden n> *N* esetén az a_n eltérése az (a_n) sorozat határértékétől kisebb, mint $\varepsilon = 0,001$

2. Írja fel az alábbi végtelen sorozatok első néhány tagját. Vizsgálja meg, a sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e. Határozza meg a konvergens sorozatok határértékét.

a.) $a_n = n^2 + (-1)^n n^2$, b.) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

3. Konvergensek-e az alábbi számsorozatok? Ha igen, számítsa ki a határértéket:

a.) $a_n = \dfrac{(3n-1)(n+2)}{(1-n)(2n+5)}$, b.) $a_n = \dfrac{4^n}{3\cdot 4^n + 2}$, c.) $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$,

d.) $a_n = \dfrac{2+5+8+\ldots+(3n-1)}{n}$, e.) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{3n+1}$, f.) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

g.) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$. h.) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$, i.) $a_n = \dfrac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2+1}}$,

j.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n+3}{n+1}}{\binom{n+4}{n+2}}$, k.), $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^{100} + 3^n}{8\cdot 3^n + 1}}$.