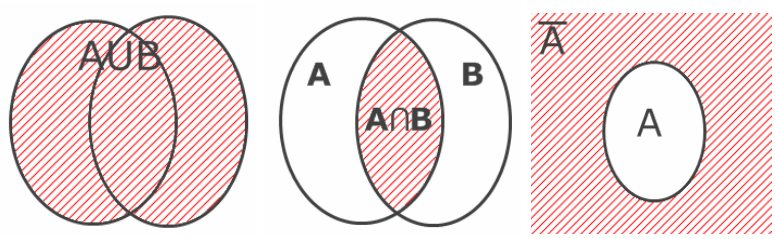
Bevezető
Ismertnek tételezzük fel a következő fogalmakat: [Halmazok megadási módjai, halmazok közötti műveletek (komplementer, metszet, unió)]

Szemléltetés:



Unióképzés és metszetképzés tulajdonságai

Idempotencia:
$A \cap A = A$, $A \cup A = A$,
Kommutativitás:
$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

Asszociativitás
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
Disztributivitás
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

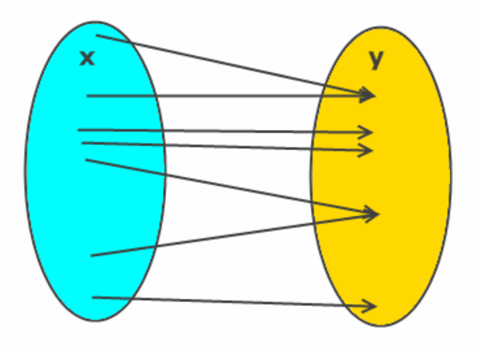
Ismertnek tételezzük a teljes indukció elvét.
Példa teljes indukciós bizonyításra a Bernoulli egyenlőtlenség bizonyítása, melyet később felhasználunk, mely szerint:

$$(1+h)^n > 1+nh$$ minden n természetes számra (ha h>-1),

Definíció: függvény

X és az **Y** halmaz elemei közötti „egyértelmű" megfeleltetést függvénynek nevezzük. Az egyértelmű az jelenti, hogy egy **X** elemhez nem rendelhetünk több elemét **Y**-nak.

A függvénykapcsolatot a hozzárendelési szabály megadásával határozzuk meg: $y=f(x)$



X-hamazt értelmezési tartománynak, **Y**-halmazt értékkészletnek nevezzük.

Ha **X** és **Y** valós számhalmazok, akkor valós függvényekről beszélünk.

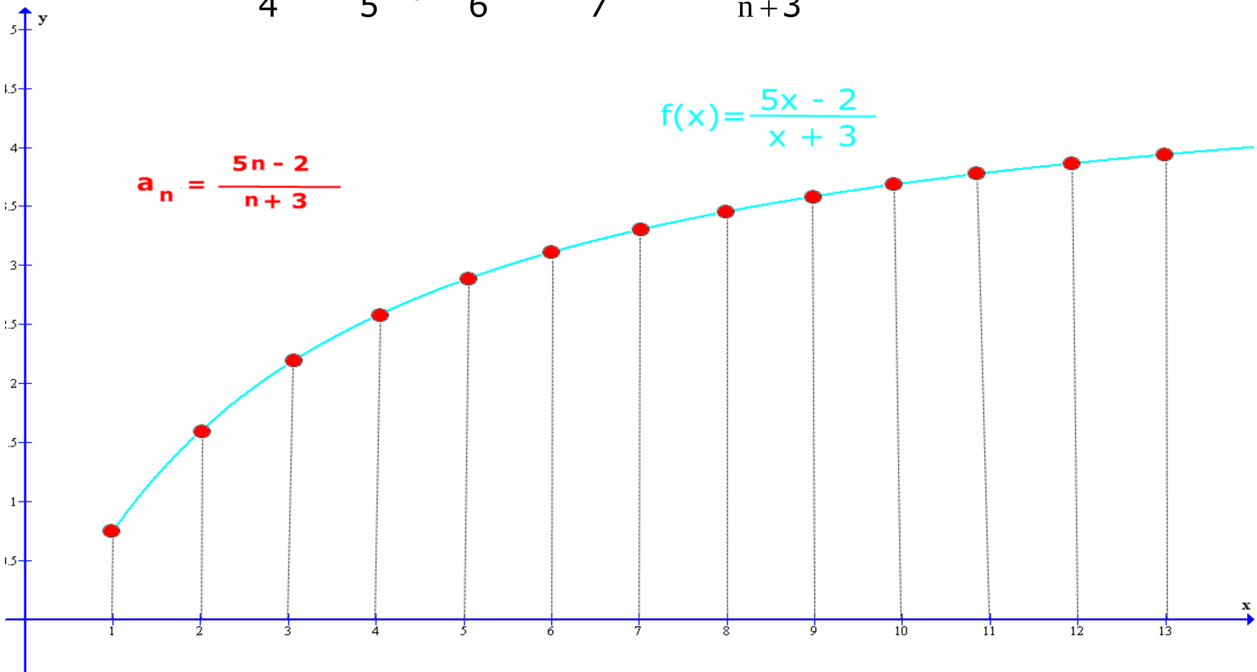
A $y=f(x)$ függvénykapcsolat szemléltetése a szokásos Descartes koordináta rendszerben:

Valós számsorozatok

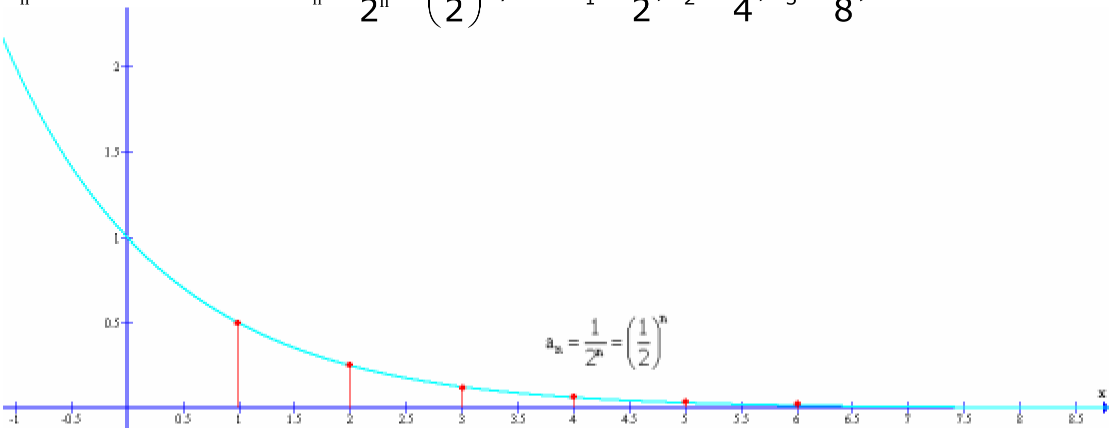
Definíció
A természetes számokon értelmezett valós érékű függvényeket valós számsorozatoknak nevezzük.

Példa: $a_n = \dfrac{5n-2}{n+3}$

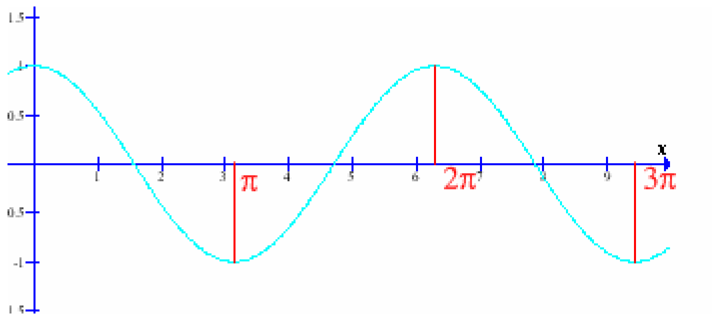
Elemei: $a_1 = \dfrac{3}{4}, a_2 = \dfrac{8}{5}, a_3 = \dfrac{13}{6}, a_4 = \dfrac{18}{7}, \ldots . a_n = \dfrac{5n-2}{n+3}$



$a_n = 2^{-n}$ azaz $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{8}, \ldots$



$a_n = \cos(n \cdot \pi)$ azaz $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$ vagyis $a_n = (-1)^n$



$a_n = (-1)^{n+1}\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ azaz $a_1 = 3, a_2 = -\left(2 + \frac{1}{2}\right), a_3 = \left(2 + \frac{1}{3}\right), \ldots$

$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)$ azaz $a_1 = 1, a_2 = -\left(\frac{3}{4}\right), a_3 = \left(\frac{5}{9}\right), \ldots$

e) Írjuk fel annak a sorozatnak az általános (n.-ik) elemét, mely úgy keletkezik, hogy beütünk a kalkulátorunkon egy tetszőleges A számot és elkezdjük a $\sqrt{\ }$ jelet nyomogatni.

Azaz: $a_1 = A$, $a_2 = \sqrt{A}$, $a_3 = \sqrt{\sqrt{A}}$, $a_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}}, \ldots$, az általános elem $a_n = \sqrt[2^n]{A}$

Az érdekel minket, hogy egy végtelen sorozat, „tart-e" valahová, egyre jobban „megközelít"-e egy valós számot, más szóval van-e határértéke, konvergens-e.

Határérték definíciója.

Definíció: határérték

A $h \in R$ számot az a_n sorozat határértékének nevezzük, ha tetszőleges pozitív ε-hoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

<u>Megjegyzés:</u> A határérték fenti definíciója úgy is megfogalmazható, hogy $n > n_0$ indexek esetén a sorozat tagjainak a $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ nyílt intervallumba kell esni. Ez egyben azt is jelenti, hogy ezen az intervallumon kívül legfeljebb n_0 darab, azaz véges sok sorozatelem lehet.

A határérték jelölésére az alábbi kifejezést használjuk: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = h$

Szokás ilyenkor azt mondani, hogy a_n tart *h*-hoz, vagy konvergál *h*-hoz. Jelben: $a_n \to h$
<u>Megjegyzés:</u> Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy **konvergens**, ha nincs, akkor **divergens**nek nevezzük.

Hangsúlyozzuk, hogy a végtelen nem valós szám, tehát a fenti definíció értelmében nem lehet egy sorozat határértéke. Ennek ellenére szoktak arról beszélni, hogy egy sorozat végtelenhez tart. Ezt a következőképpen kell érteni:

Definíció: végtelenhez tartás
Az a_n sorozat végtelenhez tart, ha bármely valós *K* számhoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $a_n > K$ egyenlőtlenség fennáll.
Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
Hasonlóan definiálható a minden határon túl csökkenő sorozat.

Definíció: monotonitás
Az a_n sorozat növekedő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \le a_{n+1}$.
Az a_n sorozat szigorúan növekedő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n < a_{n+1}$.
Az a_n sorozat csökkenő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$.
Az a_n sorozat szigorúan csökkenő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n > a_{n+1}$.
Definíció: korlátosság
Az a_n sorozat korlátos, ha létezik olyan *A* és *B* szám amelyekkel minden $n \in N$ esetén teljesül az $A \le a_n \le B$ egyenlőtlenség.

Tétel
Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Nevezetes határértékek

1. **Hatványsorozat reciproka**: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0$ ahol k természetes szám

2. **Váltakozó előjelű hatványsorozat reciproka**: $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n \frac{1}{n^k}\right) = 0$ ahol k természetes szám

Példák sorozat felismerésére: $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n n^{-4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n \frac{1}{n^4}\right)=0$

3. **Geometriai sorozat:** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad |q|<1 \\ 1 & \text{ha} \quad q=1 \\ \text{divergens} & \text{egyébként} \end{cases}$

Példák geometriai sorozat felismerésére:

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$, mert ez egy geometriai sorozat ahol $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, és $-1\le\frac{1}{\sqrt{2}}\le 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^{-3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(-3)^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(-3)^3}\right)^n=0$, mert ez egy geometriai sorozat ahol $q=-\frac{1}{27}$, és $-1\le-\frac{1}{27}\le 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}99999)^n=0$, mert ez egy geometriai sorozat ahol $q=0.99999$ és $-1\le 0.99999\le 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}00001)^n=+\infty$ mert ez egy geometriai sorozat ahol $q=1.00001$ és $q\ge 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^n=0$, mert ez egy geometriai sorozat (ugyanaz mint a fenti) ahol $q=1-\frac{1}{10^5}$ és $-1\le 1-\frac{1}{10^5}\le 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^8}\right)^n=+\infty$, mert ez egy geometriai sorozat ahol $q=1+\frac{1}{10^8}$ és $1\le 1+\frac{1}{10^8}$

Láthatjuk, hogy ha a geometriai sorozat alapja (q) egynél - akár milyen kicsivel - kisebb akkor a sorozat $0-\text{hoz}$, ha pedig akár milyen kicsivel nagyobb, akkor $+\infty$ hez tart a sorozat.

$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n\pi)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$, (q=1)

4. **Az e számot definiáló nevezetes sorozat** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatról be lehet bizonyítani, hogy létezik határértéke és ezt a határértéket elnevezzük **e**-nek

Bizonyítás vázlat: belátjuk, hogy a sorozat korlátos, azaz $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ ha (n>2), utána belátjuk, hogy szigorúan monoton nő, azaz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ minden $n\in N$ re. Tekintve, hogy minden monoton és korlátos sorozat konvergens, van határértéke, legyen a határérték neve **e**, melyre $2<e<3$. Lásd: http://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-féle_szám
e $\approx 2.7182818284590452353602874713526624$9, az e szám 1 millió jegye

5. **Hatvány sorozat / geometriai sorozat**:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k}}{q^{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{k}q^{n}=\infty$$ ahol k rögzített egész szám és $|q|>1$,

Példák a sorozatra:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{14}}{4^{n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty} n^{14}\cdot 4^{n}=\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{4}\cdot 2^{-\frac{n}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{4}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}=0$$

$n\to\infty$

Konvergencia tételek, kritériumok

A következőkben olyan tételek (konvergencia kritériumok) következnek, melyek segítenek, hogy az összetett sorozatok határértékét már ismert sorozatok határértékére vezessük vissza.

Definíció: részsorozat
Egy sorozat megritkításával (elhagyunk elemeket az eredeti sorozatból) keletkező végtelen sorozatot részsorozatnak nevezzük.
Tétel:
Egy konvergens sorozatnak minden részsorozata konvergens és a sorozat határértékéhez konvergál.

Példák a tétel alkalmazására:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n}=e$ mert ez az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ nevezetes sorozat egy részsorozata (minden nyolcadik elemet vesszük a sorozatból), mely ezért a sorozat határértékéhez, azaz e-hez tart

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)^{n^{2}}=e$ mert ez az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ nevezetes sorozat egy részsorozata (1., 4., 9., stb. elemeket vesszük a sorozatból), tehát e-hez tart

Tétel: összeg, szorzat, hányados határértéke
Ha az a_n sorozat konvergens és határértéke ***a***, valamint a b_n sorozat konvergens és határértéke ***b***, akkor

I. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = a \pm b$

Példák a tétel alkalmazására:

II. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$

Példák a tétel alkalmazására:

III. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ (ha $b_n \neq 0$ és $b \neq 0$)

Példák a tétel alkalmazására:

IV. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^k\right) = a^k$ ahol k rögzített természetes szám

Példák a tétel alkalmazására: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^8 = e^8$

V. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^{\frac{1}{k}}\right) = a^{\frac{1}{k}}$ ahol k rögzített természetes szám

Példák a tétel alkalmazására: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$

VI. **Ha** $a_n \le b_n$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Példák a tétel alkalmazására: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ mert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n > 2^n$ és $2^n \to +\infty$

VII. **Ha** $0 \le a_n \le b_n$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Példák a tétel alkalmazására: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0$ mert

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ mivel $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, és 2<e<3, ezért $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ és

így $\frac{1}{3} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}$, innen következik, hogy $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ és $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ tehát

$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to 0$

HATÁROZATLAN ALAKOK

Tétel: Ha egy $\frac{a_n}{b_n}$ alakú sorozatban $(a_n) \to \infty$ és $(b_n) \to \infty$ akkor a sorozat szimbolikusan $\frac{\infty}{\infty}$ **„HATÁROZATLAN ALAKÚ"** azaz bármi lehet a határértéke, tarthat ∞-hez

Példák $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékre:

Tétel: Ha egy $(a_n)^{b_n}$ alakú sorozatban $(a_n) \to 1$ és $(b_n) \to \infty$ akkor a sorozat un. **„HATÁROZATLAN ALAKÚ"** azaz bármi lehet a határértéke, tarthat ∞-hez és divergálhat is.

Pl:

Feladatok

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^8 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^8 = 1^8 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Ha egy korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens.

Megjegyzés:Nem korlátos sorozatra nem igaz,

Pl:

Ha egy sorozatnak több torlódási pontja van akkor divergens

Pl: $a_n = \sin n$, vagy $a_n = (-1)^n$

Tétel: Ha minden n-re $a_n \le c_n \le b_n$, akkor amennyiben léteznek a határértékek teljesül rájuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

Rendőr-elv , (más elnevezéssel szendvics-elv)

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = H$ és $a_n \le c_n \le b_n$ egy ha n „elég nagy” ekkor a c_n sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} c_n = H$

Szavakkal: ha két konvergens sorozat, melynek ugyanaz a határértéke közrefog egy harmadik sorozatot, akkor annak a sorozatnak is van határértéke és az is ugyanaz.

Példák a rendőrelv alkalmazására

Feladat: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = ?$

Megoldás:

Mivel $-1 \le \sin n \le 1$, ezért $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$, tehát

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \le \frac{\sin n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ és $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, miatt $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$

Feladat: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = ?$

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ mert részsorozata az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatnak, mely **e**-hez tart.

Mivel e közelítő értéke 2,71…ezért ha az n már „elég nagy”, akkor $2 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \le 3$

Mivel $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$, ezért $2^{\frac{1}{n}} \le \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \le 3^{\frac{1}{n}}$. Alkalmazva a rendőr elvet kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}}$$ és mivel $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, és $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$ miatt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ **nevezetes határérték, melyet a rendőrelv segítségével lehet belátni.**

Bizonyítás: A Bernoulli egyenlőtlenség szerint: $(1+h)^n > 1+nh$, helyettesítsük h helyére az $\sqrt[n]{a}-1$ kifejezést, kapjuk, hogy $\left(1+\sqrt[n]{a}-1\right)^n > 1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, vagyis

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n > 1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $a > 1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, átrendezve: $\frac{a-1}{n} > \left(\sqrt[n]{a}-1\right) > 0$ és a rendőrelv alapján: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=0$ azaz $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ **nevezetes határérték, melyet a részsorozat elv segítségével lehet visszavezetni a** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ nevezetes határértékre.

Bizonyítás vázlat: Bebizonyítjuk teljes indukcióval, hogy a sorozat korlátos és monoton. Innen következik, hogy konvergens. Legyen a határértéke B. Akkor igaz az is, hogy $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}=B$ mivel ez egy részsorozata az $\sqrt[n]{n}$ sorozatnak. De

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{2}\cdot}\sqrt{\sqrt[n]{n}\cdot}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{B}$, tehát $\sqrt{B}=B$, innen B=1 vagy B=0, de mivel $\sqrt[n]{n}>1$ csak B=1 lehet a határértéke.

Tétel: segédsorozat alkalmazása

Ha egy a_n **sorozat elemeiből képezünk egy újabb** b_n **sorozatot úgy, hogy** $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ és a $\lim_{n\to\infty} b_n<1$, akkor az eredeti a_n sorozatra $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

Bizonyítás: Ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, akkor ha az n már „elég nagy” akkor $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, vagyis $a_{n+1}<a_n$, azaz a sorozat monoton csökkenő és korlátos tehát konvergens. De a határértéke csak 0 – lehet, hiszen ha 0-től különböző $B\neq 0$ lenne, akkor $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ mivel $a_{n+1}\to B$ és $a_n\to B$ egyszerre igaz, mivel az a_{n+1} és az a_n sorozat ugyanaz a sorozat, csak az első elemükben különböznek.

A következő nevezetes határértékeket a segédsorozat alkalmazásával lehet könnyen bebizonyítani.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}=0$$

.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

Elméleti teszt

1. Minden konvergens sorozat korlátos.
2. Ha sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens.
3. Ha egy sorozatnak váltakozik az előjele akkor divergens
4. Ha egy sorozat szigorúan monoton csökken, akkor 0-hoz tart
5. Ha egy sorozat szigorúan monoton nő, akkor ∞-hez tart.
6. Ha két sorozat összege konvergens akkor a sorozatok is konvergensek

7. Ha két sorozat konvergens akkor az összegük is konvergens-

8. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

9. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

10.

1. Vizsgálja meg monotonitás, korlátosság szempontjából a következő sorozatot!

Konvergens-e? Ha igen, adjon meg az n_0 küszöböt, ha $\varepsilon = 10^{-2}$!

$a_n = \frac{2n-3}{3-5n}$

Megoldás:

$a_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$, $a_3 = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}$

$\frac{2n-3}{3-5n} > \frac{2(n+1)-3}{3-5(n+1)}$

$\frac{2n-3}{3n-5} > \frac{2n-1}{-2-5n}$, $3-5n<0$, ha $n > \frac{3}{5}$, $-2-5n<0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^+$

$(2n-3)\cdot(-2-5n) > (2n-1)\cdot(3-5n)$

$-4n-10n^2+6+15n > 6n-10n^2-3+5n$

$6 > -3$

A sorozat monoton csökken.

Felső korlát: $K = \frac{1}{2}$

Alsó korlát: $\frac{2n-3}{3-5n} > -\frac{2}{5}$

$10n-15 < 6+10n$

$-15 < 6$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3-5n} = -\frac{2}{5}$

$\left|\frac{2n-3}{3-5n} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right| < 0,01$

$\left|\frac{2n-3}{3-5n} + \frac{2}{5}\right| < 0,01$ $\left|\frac{10n-15+6-10n}{5(3-5n)}\right| < 0,01$

$\left|\frac{-9}{15-25n}\right| < 0,01$, az abszolút értékben levő tört számlálója és nevezője is negatív, tehát a tört pozitív

$\frac{-9}{15-25n} < 0,01$

$-9 > 0,15-0,25n$

$0,25n > 9,15$

$n > \frac{9,15}{0,25}$

$n > 36{,}6 \quad n_0 = 36$

Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, adja meg a határértéküket!

$$\mathrm{b_n} = \sqrt{4\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{n} + 1} - \sqrt{4\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} - 2}$$

$$\mathrm{c_n} = \frac{3^{\mathrm{n}+2} \cdot 2^{\mathrm{n}-3} - 7 \cdot 5^{\mathrm{n}}}{5 \cdot 6^{\mathrm{n}-1} + 9}$$

$$\mathrm{d_n} = \left(\frac{2\mathrm{n} + 7}{3 - 2\mathrm{n}} \right)^{\frac{\mathrm{n}}{2}}$$

$$b_n = \left(\sqrt{4n^2 + 4n + 1} - \sqrt{4n^2 - 3n - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}} =$$

$$= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 3n + 2}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}} = \frac{7 + \frac{3}{n}}{\sqrt{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}} \to \frac{7}{4}$$

$$c_n = \frac{3^{n+2} \cdot 2^{n-3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 6^{n-1} + 9} = \frac{9 \cdot 3^n \cdot \frac{2^n}{8} - 7 \cdot 5^n}{\frac{5}{6} \cdot 6^n + 9} = \frac{\frac{9}{8} - 7 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^n}{\frac{5}{6} + 9 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n} \to \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{27}{20}$$

$$d_n = \left(\frac{2n + 7}{3 - 2n} \right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{7}{2n} \right)^n}{\left(-1 \cdot \left(1 - \frac{3}{2n} \right) \right)^n}} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\frac{7}{2}}{n} \right)^n}{(-1)^n \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{n} \right)^n}}$$

Ha n páros, a sorozat $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{e^5} = e^{\frac{5}{2}}$ határértékhez tart,

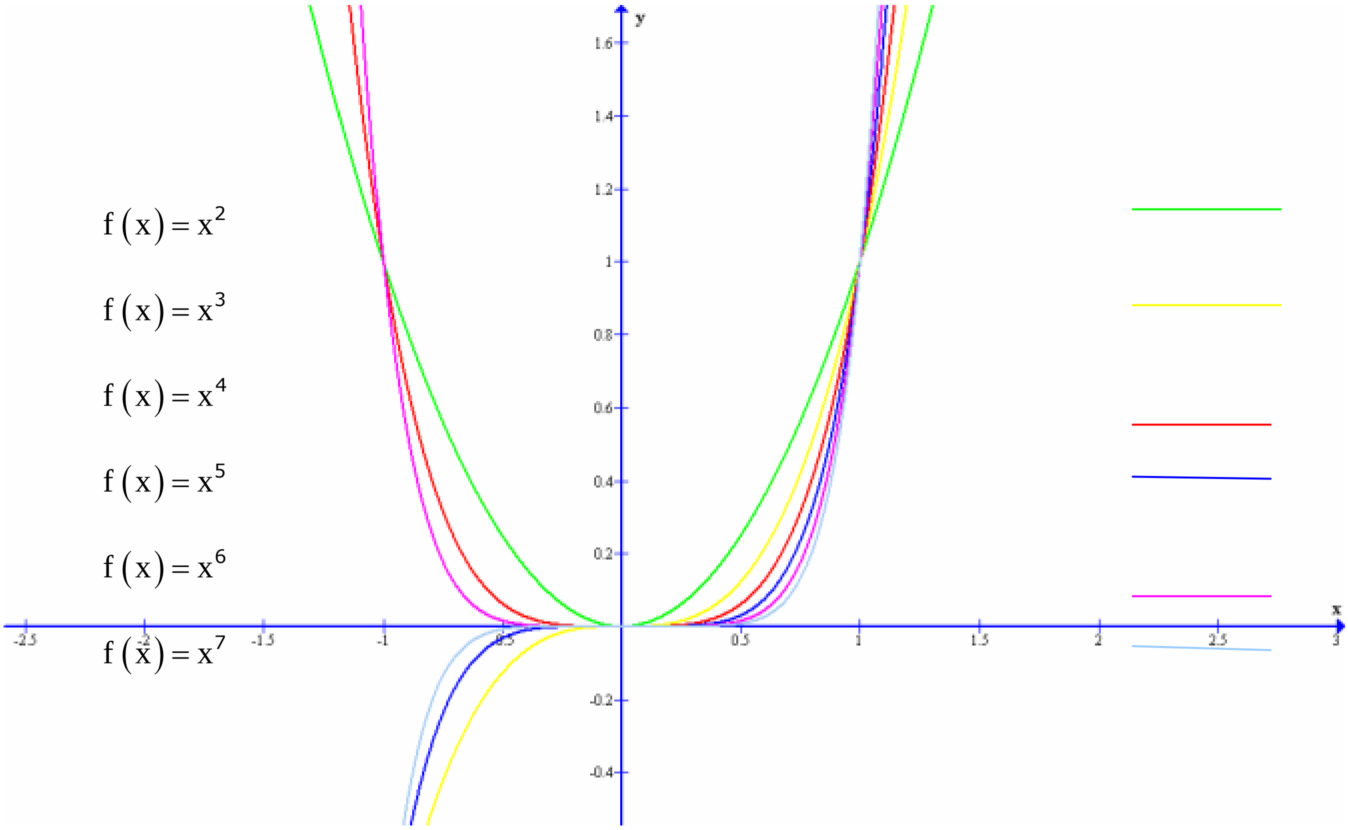
ha n páratlan $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{-e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{-e^{-5}}$ nem létezik a határérték.

Tehát a sorozatnak nincs határértéke.

Valós változós valós értékű függvények

Az ismertnek tételezett függvények:

Hatványfüggvények: $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\mathrm{k}}$ ahol *k* pozitív egész szám



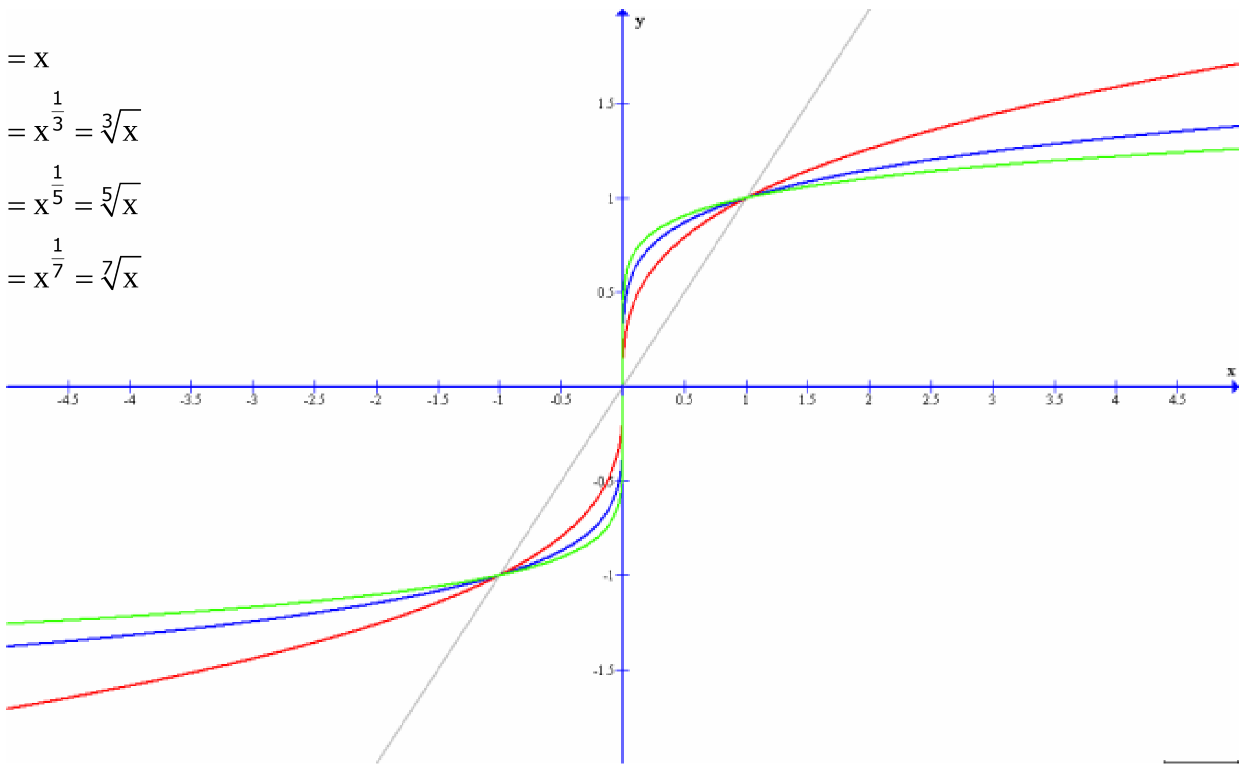
Páratlan gyökfüggvények:

$f(x)=x$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{x}$

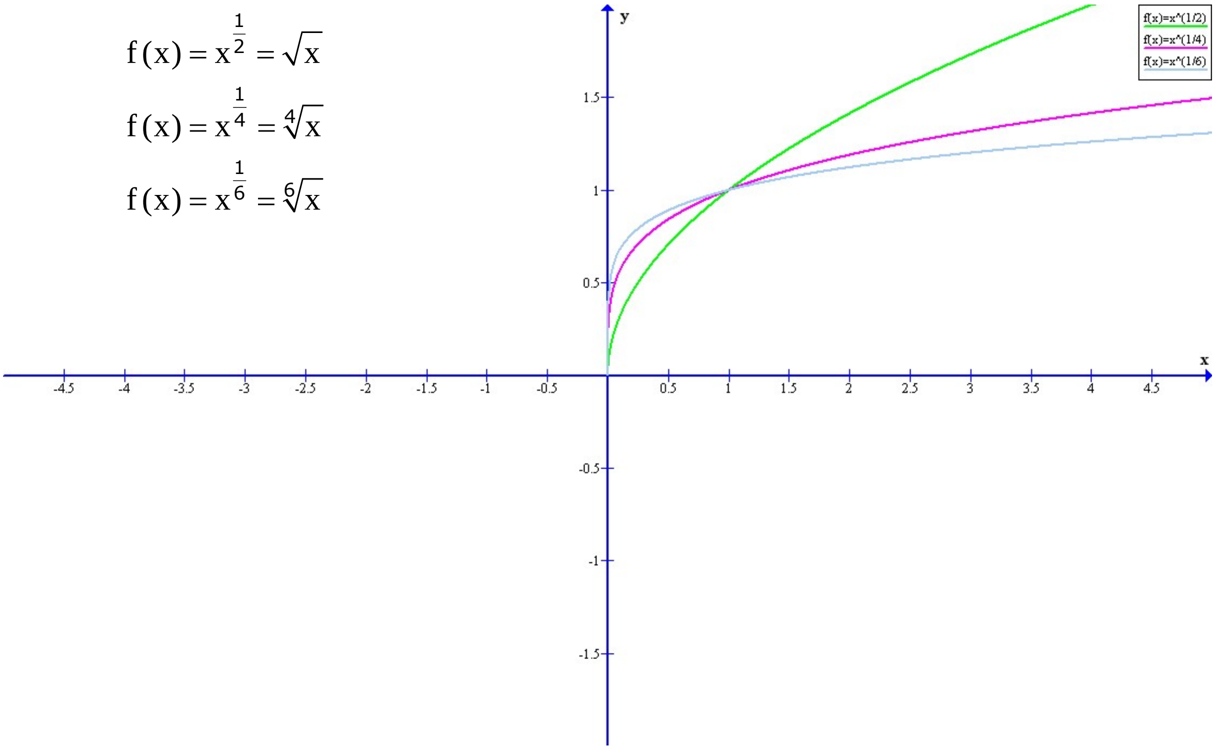


Páros gyökfüggvények:

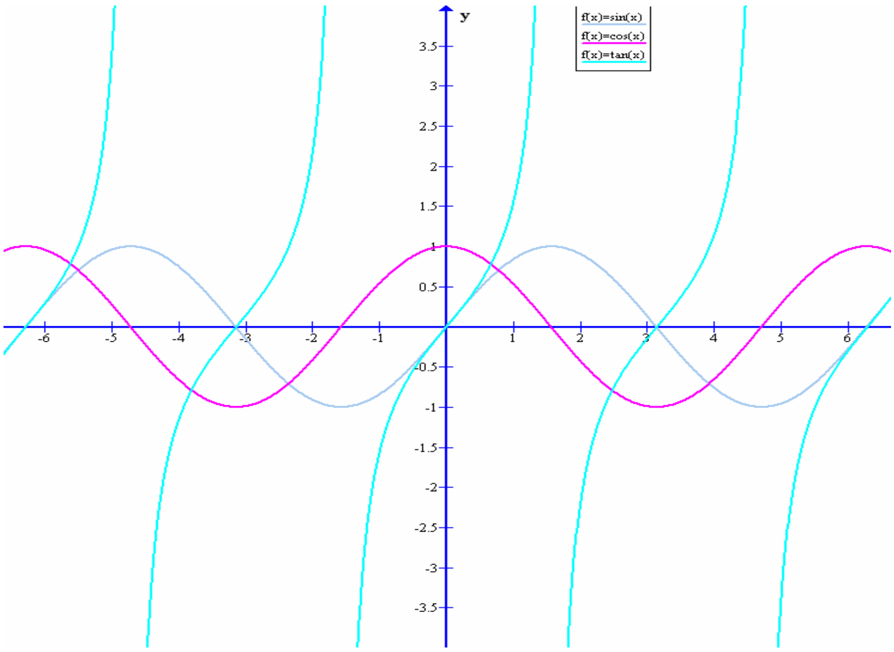
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$



Trigonometrikus függvények (sinx, cosx, tanx)



Exponenciális és logaritmus függvény $(2^x, \log_2 x)$