Matematika építészmérnököknek

2. gyakorlat (2003. 09. 25.)

Sorozatok II.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. A következő sorozatokról döntsük el: korlátos? monoton? konvergens? (Ahol az $n = 0$ esetben nem értelmes a képlet, ott a sorozatot csak az $n = 1$ elemétől kezdve vizsgáljuk.)

   (a) $a_n = 2 + 4n$ *Megoldás*: Alsó korlátja pl. 2, felülről nem korlátos. Szigorúan monoton nő, és $a_n \to \infty$.

   (b) $b_n = \frac{5}{n}$ $(n \geq 1)$ *Megoldás*: Felső korlátja pl. 5, alsó korlátja pl. 0, tehát korlátos. Szigorúan monoton csökken, és $b_n \to 0$.

   (c) $c_n = -\frac{3}{n^2}$ $(n \geq 1)$ *Megoldás*: Alsó korlátja pl. -3, felső korlátja pl. 0, tehát korlátos. Szigorúan monoton nő, és $c_n \to 0$.

   (d) $d_n = 3^n$ *Megoldás*: Alsó korlátja pl. 1, felső korlátja nincs. Szigorúan monoton nő, és $d_n \to \infty$.

   (e) $e_n = \frac{1}{4^n-1}$ $(n \geq 1)$ *Megoldás*: Alsó korlátja pl. 0, felső korlátja pl. 1/3, tehát korlátos. Szigorúan monoton csökken, és $e_n \to 0$.

   (f) $f_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \geq 1)$ *Megoldás*: Alsó korlátja pl. 4, felső korlátja pl. 5,5, tehát korlátos. Nem monoton, és $f_n \to 5$.

2. A következő sorozatok olyan tört kifejezéssel adottak, melyekben a számláló és a nevező egyaránt polinom. Ilyenkor a következőképp jártunk el: ha a számláló fokszáma nagyobb, akkor ∞, ha a nevezőé nagyobb, akkor 0 a határérték, míg ha a két fokszám egyenlő, akkor a legnagyobb kitevőjű taggal mindent elosztva határozzuk meg a határértéket.

   (a) $a_n = \frac{1}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (b) $a_n = \frac{4n+1}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to 4$

   (c) $a_n = \frac{4n^2+1}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to \infty$

   (d) $a_n = \frac{4n+1}{n^2+3}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (e) $a_n = \frac{2n+1}{3-n}$ *Megoldás*: $a_n \to -2$

   (f) $a_n = \frac{(4n+1)^3}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to \infty$

   (g) $a_n = \frac{\sqrt{4n+1}}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

3. A következő feladatokban exponenciális kifejezések találhatók. Ezekről azt kell tudni, hogy bármilyen polinomnál gyorsabban változnak.

   (a) $a_n = \frac{4^n+1}{n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to \infty$

   (b) $a_n = \frac{4n+1}{2^n+3}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (c) $a_n = 3^n$ *Megoldás*: $a_n \to \infty$

   (d) $a_n = 3^{-n}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (e) $a_n = 3^{1/n}$ *Megoldás*: $a_n \to 1$

   (f) $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (g) $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n+5n}$ *Megoldás*: $a_n \to \infty$

   (h) $a_n = \frac{2^n+400n}{3^n+5^n}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

   (i) $a_n = \frac{0.2^n}{0.3^n+5}$ *Megoldás*: $a_n \to 0$

4. A következő példákban a "gyöktelenítési trükköt" vetettük be. Azaz ha adott egy $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ alakú sorozat, ahol $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$, akkor szorozzunk $\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$-vel, így kapjuk $\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$-t, amiről már el tudjuk dönteni, hogy hová tart.

   (a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ *Megoldás*: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \to 0$

   (b) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ *Megoldás*: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} \to 0$

   (c) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}$ *Megoldás*: $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1$

   (d) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$ *Megoldás*: $a_n = \sqrt{n^4+n^2} - n^2 = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2}$

5. Ezután olyan sorozatokkal foglalkoztunk, amelyek az e szám "vonzáskörébe" tartoznak. Onnan lehet felismerni őket, hogy $(1 + a_n)^{b_n}$ alakra hozhatókak, pontosan ezt kell velük tenni, és ilyenkor a határérték ugyanaz, mint az $e^{a_n \cdot b_n}$ sorozat határértéke, azaz a feladat leegyszerűsödik $a_n \cdot b_n$ határértékének vizsgálatára. Speciális esetként érdemes megjegyezni az alap-összefüggést: $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$.

(a) $c_n = (\frac{n+2}{n})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{2}{n})^n \to e^2$

(b) $c_n = (\frac{n+2}{n-1})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{3}{n-1})^{n-1}(1+\frac{3}{n-1}) \to e^3$

(c) $c_n = (\frac{n-1}{n+2})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{-3}{n+2})^{n+2}(1+\frac{-3}{n+2})^{-2} \to e^{-3}$

(d) $c_n = (\frac{n+2}{2n-1})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{-n+3}{2n-1})^n = (1+\frac{3-n}{2n-1})^n$, tehát vizsgáljuk a $d_n := \frac{n(3-n)}{2n-1}$ sorozatot. Ennek határértéke: $d_n = \frac{3/n-1}{2/n-1/n^2} \to -\infty$, tehát az eredeti sorozat határértéke $c_n \to \lim_{n\to\infty} e^{d_n} = e^0 = 1$

(e) $c_n = (\frac{3n+2}{n-1})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{2n+3}{n-1})^n$, azaz vizsgáljuk $d_n := \frac{n(2n+3)}{n-1} \to \infty$, tehát $c_n \to \infty$

(f) $c_n = (\frac{n^2+2}{n^2-1})^n$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{3}{n^2-1})^n$, $d_n := \frac{3n}{n^2-1} \to 0$, ezért $c_n \to e^0 = 1$

(g) $c_n = (\frac{n^2+1}{n^2-1})^{n^2+n+1}$ *Megoldás*: $c_n = (1+\frac{2}{n^2-1})^{n^2+n+1}$, $d_n := \frac{2n^2+2n+2}{n^2-1} = \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \to 2$, ezért $c_n \to e^2$