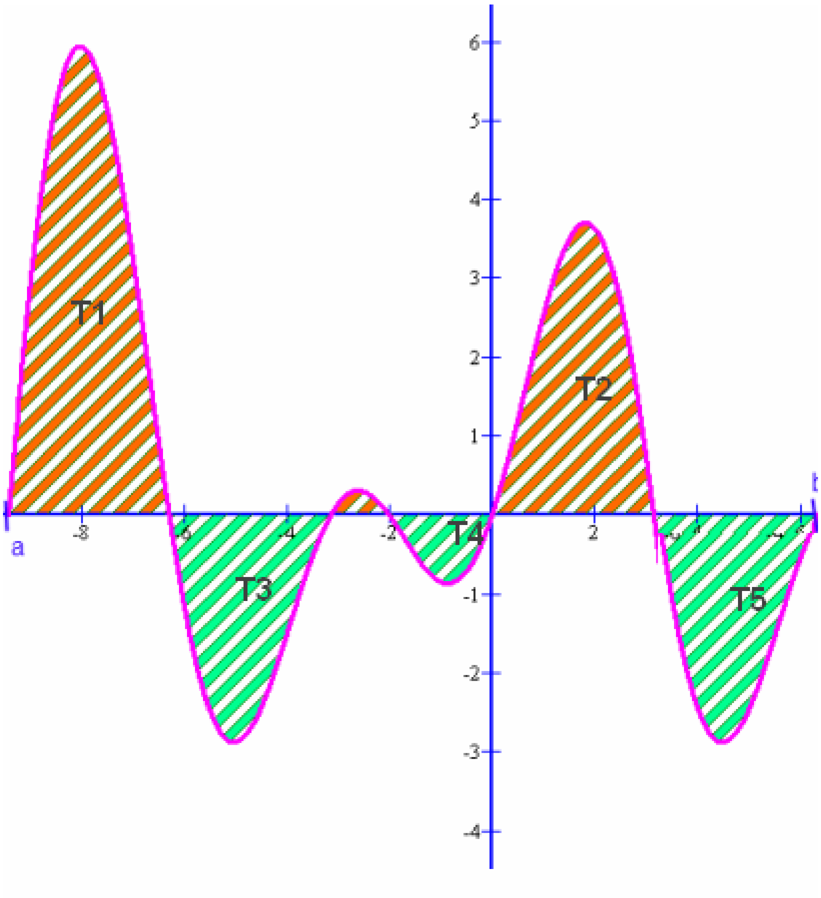
A határozott integrál alkalmazásai

A szükséges képletek:

Függvénygörbe alatti előjeles terület: $T = \int_a^b f(x)dx$

Az ábrán a T1 és T2 területek pozitívak, T3, T4, T5 területek negatívak, tehát ha $\int_a^b f(x)dx$ - t számoljuk és egy pozitív számot kapunk, akkor az azt jelenti, hogy a pozitív területek összege ennyivel nagyobb mint a negatív területek összege.



Ha a függvény és az x-tengely közötti területet akarjuk kiszámolni, akkor a függvényt fel kell bontani azonos előjelű darabokra, tehát külön-külön kell a darabok területét számolni!

Forgástest felszíne:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'\right)^2}dx$$

Forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Ívhossz:

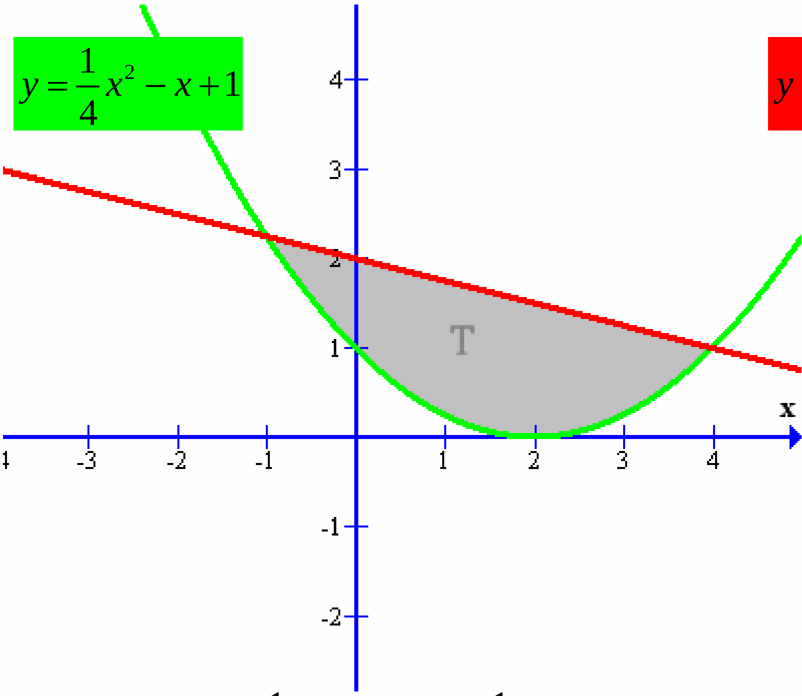
$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'\right)^2}\,dx$$

Súlypont koordinátái:

$$x_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)} \qquad y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)}$$

Feladat:

1. Határozza meg az $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$ függvény görbéje és az $y=\frac{1}{4}x+2$ egyenes által határolt síkrész területét !



A metszéspontra: $\frac{1}{4}x^2-x+1=-\frac{1}{4}x+2$, $\qquad x^2-4x+4=-x+8$,

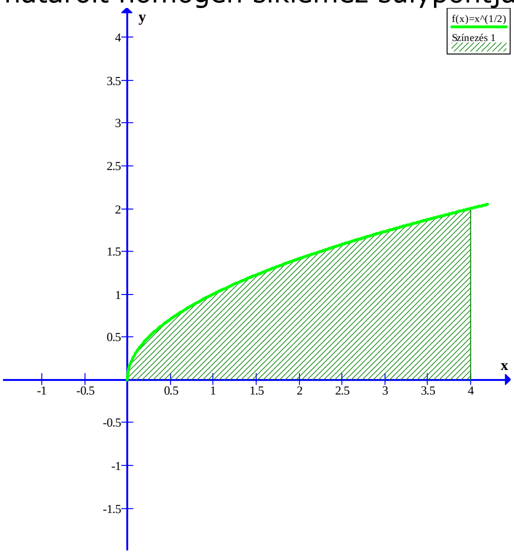
$$x^2-3x-4=0, \qquad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$T=T_2-T_1=\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)dx-\int_{-1}^{4}\left(-\frac{1}{4}x+2\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-1\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{x^3}{12}-\frac{3x^2}{8}-x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{12}-\frac{12}{8}-2\right)-\left(-\frac{1}{12}-\frac{3}{8}+1\right)=\frac{3}{4}-\frac{9}{8}-3$$

2. Határozza meg az $y=\sqrt{x}$ görbe, a $0\le x\le 9$ intervallum, és az x=4 egyenes által határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!



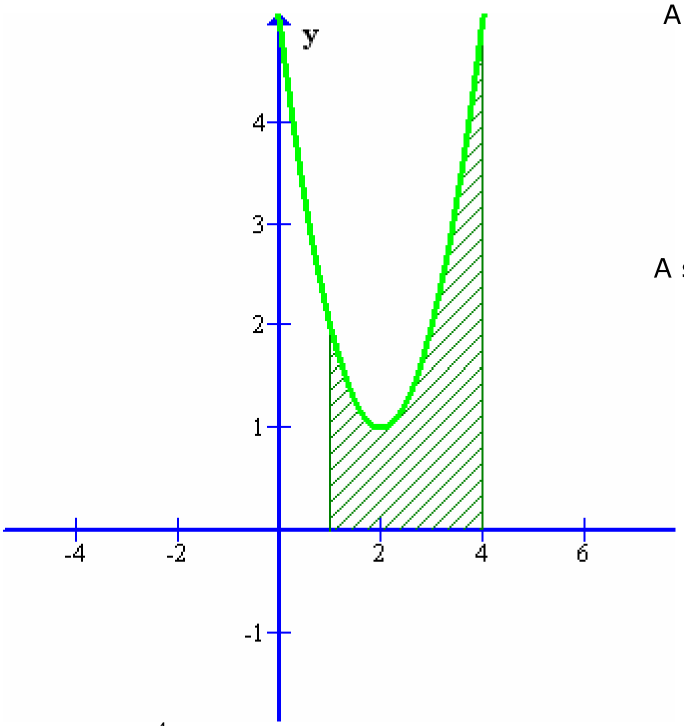
Súlypont koordinátái:

$$x_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)}\qquad y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)}$$

$$x_s=\frac{\int_0^9 x\cdot\sqrt{x}dx}{\int_0^9\sqrt{x}dx}=\frac{\int_0^9 x^{\frac{3}{2}}dx}{\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^9}{\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9}=\frac{3}{5}\frac{3^5}{3^3}=\frac{27}{5}=5,4$$

$$y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_0^9 x\cdot dx}{\int_0^9\sqrt{x}dx}==\frac{\frac{1}{4}\left[x^2\right]_0^9}{\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9}=\frac{3}{8}\frac{9^2}{3^3}=\frac{9}{8}=1,125$$

3. Határozza meg az az $y = x^2 - 4x + 5$ függvény görbéje, valamint az x-tengely, az x=1 és az x=4 egyenesek által határolt egyenletes tömegeloszlású síkrész súlypontjának helyét.



A síkidom súlypontjának x koordinátája:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

A síkidom súlypontjának y koordinátája:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

$$x_s = \frac{\int_1^4 x \cdot \left(x^2 - 4x + 5\right) \cdot dx}{\int_1^4 \left(x^2 - 4x + 5\right) \cdot dx}$$

$$\int_1^4 x \cdot \left(x^2 - 4x + 5\right) \cdot dx = \int_1^4 \left(x^3 - 4x^2 + 5x\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}\right]_1^4 =$$

$$\left(\frac{4^4}{4} - 4\frac{4^3}{3} + 5\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 4\frac{1^3}{3} + 5\frac{1^2}{2}\right) = 64 - \frac{256}{3} + 40 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} = 104 - \frac{1041}{12} = \frac{207}{12}$$

$$\int_1^4 \left(x^2 - 4x + 5\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4\frac{4^2}{2} + 20\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5\right) = 6$$

Tehát $x_s = \frac{207}{72} = 2{,}875$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

$$\int_1^4 \left(x^2-4x+5\right)^2 \cdot dx = \int_1^4 \left(x^4+2x^2\left(-4x+5\right)+\left(-4x+5\right)^2\right)\cdot dx =$$

$$\int_1^4 \left(x^4-8x^3+26x^2+40x+25\right)\cdot dx = = \left[\frac{x^5}{5}+8\frac{x^4}{4}-26\frac{x^3}{3}+40\frac{x^2}{2}+25x\right]_1^4 =$$

$$=\left(\frac{4^5}{5}+8\frac{4^4}{4}-26\frac{4^3}{3}+40\frac{4^2}{2}+25\cdot 4\right)-\left(\frac{1^5}{5}+8\frac{1^4}{4}-26\frac{1^3}{3}+40\frac{1^2}{2}+25\right)=$$

$$=\left(-\frac{3150}{15}+925\right)=\left(-\frac{13875}{15}+\frac{13875}{15}\right)=\frac{275}{15}=18{,}333$$

$$y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2\cdot dx}{\int_a^b f\left(x\right)\cdot dx}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 18{,}33}{6}=1{,}52777$$

1 Bizonyítsuk be, hogy egy $[a,b]$ intervallumban a koszinusz-hiperbolkusz (ch) függvény görbe alatti területe és ívhossza számértékben megegyezik

Megoldás:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(shx\right)^2}\,dx=\int_a^b chx\cdot dx=$$

Feladat:
Bizonyítsa be, hogy ha egy *R* sugarú gömböt párhuzamos síkokkal *2n* darab egyenlő vastagságú szeletekre vágunk, akkor valamennyi gömbszelet palástjának felszíne azonos méretű! (Azaz, ha egy gömb alakú kenyeret egyenlő vastag szeletekre vágunk, akkor minden szeletnek ugyanannyi héja van.)
(Segítségül: Ha az *f(x)* függvény görbéjének az [a, b] intervallum fölötti részét megforgatjuk az *x*-tengely körül, akkor a keletkezett test felszíne:

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'\right)^2}\,dx$$

Megoldás:

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'\right)^2}\,dx=2\pi\int_a^b \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_a^b \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_a^b \sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b \sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b \sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b dx=2\pi\left[x\right]_a^b=$$

$=2\pi\left(b-a\right)$ Határozza meg az $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$ függvény görbéje és az $y=\frac{1}{4}x+2$ egyenes által határolt síkrész területét !