8. gyakorlat Határozott integrálás alkalmazásai

1. terület	$T = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (az f grafikonja és az x tengely közötti síkidom területe)
	$T = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ (ha a síkidomot felülről f alulról g határolja)
	$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \quad T = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi$
2. síkbörbe ívhossza	$i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \quad i = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$
	$i = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi$
3. forgástest térfogata	$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \quad V = \pi\int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t)\,\mathrm{d}t$
4. forgástest felszíne	$F = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$
	$F = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$
5. síkidom nyomatéka	Ha a síkidomot az $x = a$, $x = b$, az x tengely és az $f(x) > 0$ határolja,
	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \quad M_y = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$
6. síkidom (x_S, y_S) súlypontja	$x_S = \frac{M_y}{T} \quad y_S = \frac{M_x}{T}$

Terület

1. Határozzuk meg a következő függvénygörbék és az x-tengely közötti síkidom területét.
   (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[a, b] = [1,2; 7]$
   (b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[-3, 3]$
2. Határozzuk meg az $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ elipszis területét.
3. Határozzuk meg az $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ asztrois területét.
4. Határozzuk meg a lemniszkáta területét, ha tudjuk, hogy polárkoordinátás előállítása: $r(\phi) = a\sqrt{\cos 2\phi}$.
5. Határozzuk meg az exponenciális spirál első periódusának területét.

Térfogat

6. Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola y tengely körüli megforgatásával a $0 \le y \le 4$ szakaszon keletkező test térfogatát.
7. Határozzuk meg az $x = \sin t$, $y = t$ paraméteresen adott görbe x tengely körüli megforgatásával keletkező test térfogatát, ha $0 \le t \le \pi/2$

Felszín

8. Határozzuk meg az R sugarú gömb felszínét mindkét képlettel.
9. Határozzuk meg az $y = \mathrm{ch}x$ görbe $0 \le x \le 3$ abszcisszákkal meghatározott ívének x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét.
10. Határozzuk mge az $x = \mathrm{sh}t$, $y = \mathrm{ch}t$ egyenletrendszerrel adott hiperbola $t_1 = 0$ és $t_2 = 3$ paraméterekhez tartozó pontjai által határolt ív x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának felszínét.

Ívhossz

11. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének az $[1, 4]$ intervallujm felett keletkező görbéjének ívhosszát.
12. Határozzuk meg a ciklois ívhosszát. A ciklois paraméteres egyenlete: $x = a(t - \sin x)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$
13. Határozzuk meg az archimedeszi spirál ívhosszát a 0 és π között. (Az egyenlete: $r(\phi) = a\phi$)
14. Határozzuk meg az exponenciális spirál első periódusának ívhosszát.
15. Határozzuk meg az exponenciális spirál teljes ívhosszát.

Súlypont

16. Határozzuk meg az $y = -x^2 + 2$ parabola gráfja és az x tengely között fekvő síkidom súlyontját.
17. Határozzuk meg az $y = -x^2 + 2x + 3$ parabola gráfja és az x tengely között fekvő síkidom súlyontját.
18. Határozzuk meg az $y = 2$, $y = 0$, $x = 2$ egyenesek és $y = \frac{1}{x}$ görbe által határolt síkidom súlypontját.