

### Alkalmazható képletek:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{ha } \alpha \neq -1 \text{ valós konstans}$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C \quad \text{ha } \alpha = -1,$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{ahol } F'(x) = f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int (f(x))^\alpha f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Newton-Leibniz formula a határozott integrál kiszámítására

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{ahol } F(x) \text{ a } f(x) \text{ függvény egyik primitív függvénye, vagyis } F'(x) = f(x)$$

### Feladatok:

1.  $\int (x-3)^2 dx = \frac{(x-3)^3}{3} + C$

2.  $\int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^3}{3} + C$  vagy

$$\int (2x-3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9) dx = 4 \frac{x^3}{3} - 12 \frac{x^2}{2} + 9x + C$$

3.  $\int \frac{2}{x+5} dx = 2 \int \frac{1}{x+5} dx = 2 \ln|x+5| + C$

4.  $\int \frac{1}{x^2+4x-5} dx = ?$

Racionális valódi törtfüggvény, melynek a nevezője elsőfokú tényezőkre bontható,

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5} dx = \int \frac{1}{(x+5)(x-1)} dx$$

Parciális törtre bontva

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+5)}{(x+5)(x-1)} = \frac{Ax - A + Bx + 5B}{(x+5)(x-1)} = \frac{(A+B)x + 5B - A}{(x+5)(x-1)}$$

$$\frac{(A+B)x+5B-A}{(x+5)(x-1)} \equiv \frac{1}{(x+5)(x-1)}, \text{ ebből következik, hogy } A+B=0 \text{ és } 5B-A=1$$

$$\text{kifejezve: } 6B=1, B=\frac{1}{6}, A=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} \right)$$

$$\int \frac{1}{(x+5)(x-1)} dx = \frac{1}{6} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} \right) dx = \frac{1}{6} (\ln|x-1| - \ln|x+5|) + C$$

$$5. \quad \int \frac{2x+1}{2x+5} dx = ?$$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy a számlálóban előállítjuk a nevezőt ügyeskedéssel

$$\int \frac{2x+1}{2x+5} dx = \int \frac{2x+5-4}{2x+5} dx = \int \left( 1 - \frac{4}{2x+5} \right) dx = \int 1 \cdot dx - \int \frac{4}{2x+5} dx = \int 1 \cdot dx - 2 \int \frac{2}{2x+5} dx = x + 2 \ln|2x+5| + C$$

$$6. \quad \int \frac{x^2}{x+1} dx = ?$$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy ügyeskedéssel:

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x+1} dx = \int \frac{x^2-1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$7. \quad \int \frac{3}{2x+5} dx = ?$$

$$\int \frac{3}{2x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+5} dx = \frac{3}{2} \ln|2x+5| + C$$

$$8. \quad \int \frac{3x+10}{2x+5} dx = ?$$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy a számlálóban előállítjuk a nevezőt

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+10}{2x+5} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{20}{3}}{2x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+5-5+\frac{20}{3}}{2x+5} dx = \frac{3}{2} \left( \int \frac{2x+5}{2x+5} + \frac{-5+\frac{20}{3}}{2x+5} \right) dx = \frac{3}{2} \left( \int 1 + \frac{\frac{5}{3}}{2x+5} \right) dx = \frac{3}{2} x + \frac{5}{2} \int \frac{1}{2x+5} dx = \\ &= \frac{3}{2} x + \frac{5}{2} \int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{3}{2} x + \frac{5}{2} \ln|2x+5| + C \end{aligned}$$

Felbonthatatlan másodfokú nevezőjű racionális törtfüggvények

Az olyan  $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$  alakú feladatokban ahol a nevezőben lévő másodfokú polinomnak nincs valós gyökeke, érdemes a nevezőben lévő kifejezést teljes négyzetté alakítani és  $\int \frac{1}{(dx+e)^2+1} dx$  formára hozni.

Ekkor fel lehet használni, hogy  $\text{arc}' \text{tg}(dx+e) = \frac{1}{1+(dx+e)^2} (d)$  mint a következő feladatban:

$$9. \int \frac{3}{2x^2+5} dx = ?$$

$$\int \frac{3}{2x^2+5} dx = 3 \int \frac{1}{2x^2+5} dx = \frac{3}{5} \int \frac{1}{\frac{2}{5}x^2+1} dx = \frac{3}{5} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1} dx = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \int \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1} dx = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + C$$

$$10. \int \frac{3x}{2x^2+5} dx = 3 \int \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x}{2x^2+5} dx = \frac{3}{4} \ln(2x^2+5) + C$$

$$11. \int \frac{3x+10}{2x^2+5} dx = \int \frac{3x}{2x^2+5} dx + \int \frac{10}{2x^2+5} dx, \text{ az első tag olyan mint a 9., a második pedig mint a 10. feladat}$$

$$12. \int \frac{3x^2}{2x+5} dx = ? \text{ E feladatban átalakítjuk a racionális tört függvényt egy egész polinom és egy valódi törtfüggvény összegére. Ez megoldható ügyes átalakítással vagy polinom osztással:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2}{2x+5} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{4x^2+20x-20x+25-25}{2x+5} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(2x+5)^2-20x-25}{2x+5} dx = \frac{3}{4} \int \left( (2x+5) + \frac{-20x-25}{2x+5} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int (2x+5) dx - \frac{3}{4} \int \frac{20x+25}{2x+5} dx = \frac{3}{4} \int (2x+5) dx - \frac{15}{2} \int \frac{\left(2x+5-5+\frac{5}{2}\right)}{2x+5} dx = \frac{3}{4} \int (2x+5) dx - \frac{15}{2} \int \left( 1 - \frac{\frac{5}{2}}{(2x+5)} \right) dx = \\ &= \frac{3}{4} \int (2x+5) dx - \frac{15}{2} \int \left( 1 - \frac{\frac{5}{2}}{(2x+5)} \right) dx = \frac{3}{4} (x^2+5x) - \frac{15}{2} \left( x - \frac{5}{4} \ln|2x+5| \right) + C \quad \text{Javította: Borsai Szandra} \end{aligned}$$

$$13. \int \frac{3x^2}{2x^2+5} dx = 3 \int \frac{x^2}{2x^2+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x^2}{2x^2+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x^2+5-5}{2x^2+5} dx = \frac{3}{2} \int \left( 1 + \frac{-5}{2x^2+5} \right) dx \text{ innen olyan mint a 9. feladat}$$

$$14. \int x^2(x^2-1) dx = \int (x^4-x^2) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C \quad 3.$$

$$15. \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2} dx = \int \left( x^{-\frac{3}{2}} - x^{-1} + x^2 \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$$

$$17. \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx = \int \frac{x^3-3x+x^2-3}{3x^2} dx = \int \left( \frac{x}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{6} - \ln|x| + \frac{1}{3}x + \frac{1}{x} + C \text{ elvégezve}$$

$$18. \int \frac{x^2+x-6}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} dx = \int (x+3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$19.. \int \frac{x^2-4x+7}{x-2} dx = ? \text{ Sajnos a számláló nem osztható } (x-2) \text{ -vel ezért tagonként véve:}$$

$$\int \frac{x^2-4x+7}{x-2} dx = \int \left( \frac{x^2}{x-2} - \frac{4x}{x-2} + \frac{7}{x-2} \right) dx = \int \frac{x^2}{x-2} dx - \int \frac{4x}{x-2} dx + \int \frac{7}{x-2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x^2 - 4 + 4}{x-2} dx - 4 \int \frac{x-2+2}{x-2} dx + 7 \int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x+2)+4}{x-2} dx - 4 \int \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx + 7 \int \frac{1}{x-2} dx = \\
&= \int \left( (x+2) + \frac{4}{x-2} \right) dx - 4 \int \left( 1 + \frac{2}{x-2} \right) dx + 7 \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln|x-2| - 4(x + 2 \ln|x-2|) + 7 \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

$$20. \quad \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{3^x} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{\ln \frac{1}{3}} \left( \frac{1}{3} \right)^x + C = \ln|x| - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{3^x} + C =$$

$$21. \quad \int (3^x - x^{-4} + \sin 5x) dx = \frac{1}{\ln 3} 3^x - \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{1}{5} \cos 5x + C$$

$$22. \quad \int (4^x - x^{-3} + \cos 2x) dx = \frac{1}{\ln 4} 4^x - \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{2} \sin 2x + C =$$

$$23.. \quad \int_1^8 \frac{2+8x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} dx = ? \text{ Először a határozatlan integrált kiszámítjuk, majd alkalmazzuk a}$$

Newton-Leibniz formulát

$$\int \frac{2+8x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} dx = \int \left( \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}} \right) dx = \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{8}{3} \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{8}{3}} + C$$

$$\int_1^8 \frac{2+8x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} dx = \left[ x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{8}{3}} \right]_1^8 = (\sqrt[3]{8})^2 + (\sqrt[3]{8})^8 - \left( (\sqrt[3]{1})^2 + (\sqrt[3]{1})^8 \right) = 4 + 256 - 2 = 258$$