9. gyakorlat Lineáris algebra

Mátrixok szorzása

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

   $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$

   Mely esetekben értelmesek a páros szorzatok? Ahol értelmes, számoljuk ki a szorzatot.

Skalárszorzás: hossz, merőlegesség, vektorok szöge

2. Az alábbi vektorok esetén bontsuk fel az elsőt a másodikkal párhuzamos, illetve merőleges összetevőkre. Ezután nézzük meg, hogy ki tudjuk számolni a közrezárt paralelogramma területét.

   a) $\underline{a} = 17\underline{i} + 6\underline{j} + 6\underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 2\underline{k}$
   b) $\underline{a} = 9\underline{i} + 10\underline{j} + 10\underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$
   c) $\underline{a} = 12\underline{i} + 12\underline{j} + 5\underline{k}$, $\underline{b} = 4\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$
   d) $(1, -1, 0, 2)$, $(2, 3, 1, -1)$

3. Számítsuk ki az előző feladatbeli vektorok szögének koszinuszát, majd magát a szöget.

Determináns az $\mathbb{R}^{2\times 2}$, illetve az $\mathbb{R}^{3\times 3}$ térben.

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsait.

   a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x+y \\ 1 & 1 & x+y \\ 1 & -1 & x+y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   c) Alsó, vagy felső háromszög mátrix esetén a determináns a főátlóbeli elemek szorzata:

   $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & x & y & a \\ 0 & 1 & z & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$,

   $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{bmatrix}$,

   d) Két sor felcserélése esetén a determináns előjelet vált

   $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

   e) Sorok összeadása nem változtat a determinánson:

   $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

Determináns alkalmazásai

5. Határozzuk meg az alábbi vektorok által kifeszített paralelepipedon, illetve tetraéder térfogatát.

   a) $\underline{a} = (1, 4, 7)$, $\underline{b} = (2, 5, 8)$, $\underline{c} = (3, 6, 9)$
   b) $\underline{a} = (1, 6, 4)$, $\underline{b} = (-2, 0, 1)$, $\underline{c} = (3, -1, -1)$
   c) $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (2, 2, 0)$, $\underline{c} = (3, 3, 3)$
   d) $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (1, 0, 0)$, $\underline{c} = (3, 3, 3)$
   e) $\underline{a} = (3, 1, 1)$, $\underline{b} = (1, 3, 1)$, $\underline{c} = (1, 1, 3)$
   f) $\underline{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{b} = (1, 2, 4, 8)$, $\underline{c} = (1, 3, 9, 27)$, $\underline{d} = (1, 4, 16, 64)$

6. Határozzuk meg az alábbi vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát.

   a) $\underline{a} = (1, 4, 8)$, $\underline{b} = (2, 5, 9)$, $\underline{c} = (3, 6, 10)$, $\underline{d} = (0, 0, 1)$
   b) $\underline{a} = (0, 6, 5)$, $\underline{b} = (-3, 0, 2)$, $\underline{c} = (2, -1, -2)$, $\underline{d} = (-1, 0, 1)$

7. Az alábbi vektorpárok mindegyike kifeszít egy síkot $\mathbb{R}^3$-ban. Soroljunk fel néhány olyan vektort, amelyek merőlegesek a síkokra. (vektoriális szorzat)

   a) $\underline{a} = (1, 4, 7)$, $\underline{b} = (2, 5, 8)$
   b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (-2, 0, 1)$
   c) $\underline{a} = (1, 0, -1)$, $\underline{b} = (2, 2, 0)$
   d) $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (1, 3, -1)$
   e) $\underline{a} = (3, 1, 1)$, $\underline{b} = (1, 3, 1)$

Vegyesen

8. Határozzuk meg az alábbi vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

   a) $(1, 2)$, $(-1, 2)$
   b) $(1, 2, 0)$, $(-1, 2, 0)$
   c) $(1, -1, 2)$, $(1, 2, 3)$
   d) $(1, -4, 2)$, $(3, 1, 3)$
   e) $(1, -4, 2, 1)$, $(3, 1, 3, -1)$

9. Határozzuk meg az alábbi vektorok által kifeszített háromszög területét.

   a) $(2, 3)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$
   b) $(2, -1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 0, -1)$
   c) $(2, -3, 2, 1)$, $(4, 2, 3, -1)$, $(1, 1, 0, 0)$