8. Felületek a térben

$\underline{r}(u_0, v_0)$-beli érintősík meghatározása

Az $\underline{r}(u_0, v_0)$-ból a síkba mutató két vektor a derivált vektorok: $\underline{r}'_u(u_0, v_0)$ és $\underline{r}'_v(u_0, v_0)$. Ezért az érintősík egy normálisa:

$$\underline{n} = (n_1, n_2, n_3) = \underline{r}'_u(u_0, v_0) \times \underline{r}'_v(u_0, v_0),$$

egy pontja

$$\underline{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0).$$

Így az érintősík egyenlete:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkját a megadott pontokban.

1. $\underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $(u_0, v_0) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$
   mo.: $-x - \sqrt{3}y + 2z = 0$
2. $\underline{r}(u, v) = (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u)$, $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$
   mo.: $x + \sqrt{3}y = 6$
3. $\underline{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u_0, v_0) = (1, 2)$
   mo.: $-2x - 4y + z = -5$
4. $\underline{r}(u, v) = (3+2\cos u) \cos v\underline{i} + (3+2\cos u) \sin v\underline{j} + 2\sin u\underline{k}$, $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right)$
5. $x^2y + z^3 = 12$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.

   Ha a felület $z = f(x, y)$, $(x, y) \in T$ alakban adott, akkor a felület vektoregyenletes felírása

   $$\underline{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in T$$

Felületek felszínének meghatározása

Egy T tartomány $\underline{r}(u, v)$ szerinti képének, ez egy $\mathcal{F}$ felület, felszíne:

$$A_{\mathcal{F}} = \iint_T |\underline{r}'_u(u, v) \times \underline{r}'_v(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

1. R sugarú gömb felszíne. A paraméterezés:

   $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u) \\ u &\in [0, \pi] \\ v &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

   mo.: $4R^2\pi$

2. Tórusz felszíne. A $(3, 0, 0)$ körül vesszünk az x—z síkban egy 2 sugarú kört. Megforgatjuk a z-tengely körül. A paraméterezés:

   $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= (3 + 2\cos u) \cos v\underline{i} \\ &\quad +(3 + 2\cos u) \sin v\underline{j} + 2\sin u\underline{k} \\ u &\in [0, 2\pi] \\ v &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

   mo.: $24\pi^2$

3. $90°$ nyílásszögű kúp egy részének felszíne. Paraméterezés:

   $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, u) \\ & 0 \le u \le 5 \\ & 0 \le v \le 2\pi \end{aligned}$$

   mo.: $25\sqrt{2}\pi$

4. Hengerpalást felszíne

   $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= (3u \cos v, 3u \sin v, v) \\ & 0 \le u \le 5 \\ & 0 \le v \le 2\pi \end{aligned}$$

   mo.: $5 \cdot 2\pi \cdot 3$

5. $\underline{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ felszíne, ha (u, v) az origó körüli 2 sugarú kört futja végig.
   mo.: $\frac{32\pi}{3}$

6. $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= \mathrm{ch} u \cos v\underline{i} + u\underline{j} + \mathrm{ch} u \sin v\underline{k} \\ & 0 \le u \le 3 \\ & 0 \le v \le 2\pi \end{aligned}$$

   mo.: $2\pi \left(\frac{3}{2} + \frac{\mathrm{sh}6}{4}\right)$

7. Csavarfelület felszíne.

   $$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, v) \\ & 0 \le u \le 2 \\ & 0 \le v \le 2\pi \end{aligned}$$

Felületi pontok osztályozása

$$\begin{aligned} \underline{m}^*(u_0, v_0) &:= \underline{r}'_u(u_0, v_0) \times \underline{r}'_v(u_0, v_0) \\ L^*(u_0, v_0) &:= \underline{r}''_{uu}(u_0, v_0) \cdot \underline{m}^*(u_0, v_0) \\ M^*(u_0, v_0) &:= \underline{r}''_{uv}(u_0, v_0) \cdot \underline{m}^*(u_0, v_0) \\ N^*(u_0, v_0) &:= \underline{r}''_{vv}(u_0, v_0) \cdot \underline{m}^*(u_0, v_0) \end{aligned}$$

$$L^*N^* - (M^*)^2 \begin{cases} > 0, & \text{akkor } (u_0, v_0) \text{ elliptikus,} \\ < 0, & \text{akkor } (u_0, v_0) \text{ hiperbolikus,} \\ = 0, & \text{akkor } (u_0, v_0) \text{ parabolikus.} \end{cases}$$

Ha a felület $z = f(x, y)$, $(x, y) \in T$ alakban adott, akkor könnyű ellenőrizni, hogy az $L^*N^* - (M^*)^2$ kifejezés előjele megegyezik az

$$\partial_{xx} f \cdot \partial_{yy} f - (\partial_{xy} f)^2$$

előjelével.

1. Ellenőrizzük, hogy az $\underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ felület minden pontja parabolikus.
2. Mutassuk meg, hogy az $\underline{r}(u, v) = (\sin v, v, u)$ felület minden pontja hiperbolikus
3. Bizonyítsuk be, hogy a tórusz külső részén fekvő pontok elliptikusak, a belső részén fekvő pontok hiperbolikusak, a legfelső és az legalsó kör minden pontja parabolikus.

4. Mutassuk meg, hogy a $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ alakban megadott felület minden pontja hiperbolikus.

5. Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = (u^2+v^2, u+v, u^2v^2)$ felület $(u_0, v_0) = (1, -1)$ pontjában a felület típusát.
mo.: hiperbolikus

6. Lássuk be, hogy az $z = x^4 - y^4$ alakban megadott felület minden pontja hiperbolikus.

7. Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = (\mathrm{sh} u \cos v, \mathrm{sh} u \sin v, v)$ csavarfelületnek a $T = \{(u,v) : 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi\}$ tartomány által meghatározott darabjának a felszínét.

8. Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = (u^2 \cos v, u^2, u^2 \sin v)$ felületnek a $T = \{(u,v) : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le \pi\}$ tartomány által meghatározott darabjának a felszínét.

9. Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = (\ln u, \ln u \sin v, \ln u \cos v)$ felületnek a $T = \{(u,v) : 1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le \pi\}$ tartomány által meghatározott darabjának a felszínét.