**Differenciálegyenletek**

**Bevezetés**

Differenciálegyenletnek olyan egyenletet nevezünk, amelyben az ismeretlen egy függvény és az egyenlet tartalmazza az ismeretlen függvény (valahányad rendű) deriváltját.

Például:

(1) $y' = x^2 \cdot y$, máképpen $\dfrac{dy}{dx} = x^2 y$,

(2) $y'' + 5y' + 6y = e^x$,

(3) $(y')^2 y - \sin x = 0$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 + x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet **közönséges** differenciálegyenletnek nevezzük. Pl.: (1), (2), (3) egyenlet.
Ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor a differenciálegyenletet parciális differenciálegyenletnek nevezzük. Pl.: (4) egyenlet.
Differenciálegyenlet rendje: az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendje.

Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja: $F\left(x, y', y'', y''', ..., y^{(n)}\right) = 0$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az (1) egyenletnek megoldása

az $y = \dfrac{x^2}{2} + 5x + 57$ függvény.

A differenciálegyenlet **általános megoldása** az összes megoldást tartalmazó halmaz.

Az (1) egyenlet általános megoldása

$y = \dfrac{x^2}{2} + 5x + C$ függvénysereg, ahol C tetszőleges valós konstans

Egy differenciálegyenletet megoldása az általános megoldás meghatározását jelenti. Az alkalmazások többségénél azonban egy további feltételt kielégítő, úgynevezett partikuláris megoldást keresünk. Pl.: az (1) egyenlet esetén kérdezhetjük melyik az a megoldás, amelyiknél x=2 esetén y=15, vagy röviden: A megoldás függvények grafikonjai közül melyik megy át a (2, 15) koordinátájú ponton? A választ úgy kapjuk, hogy az általános megoldásból meghatározzuk a feltételt kielégítő c konstanst (jelen esetben c=3).

**További elnevezések:**

Elsőrendű differenciálegyenlet

**Definíció**

Elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, melyben $x, y, y'$ szerepelnek, $F\left(x, y, y'\right)=0$

Ha ebből $y'$ kifejezhető, akkor explicit egyenletről beszélünk.

$y' = f\left(x, y\right)$

**Definíció**

Azt mondjuk, hogy $y = y(x)$ differenciálható függvény megoldásfüggvénye a differenciálegyenletnek, (a,b)-n, ha $y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \ \forall \ x \in (a,b)$

Adott $x_0, y_0$ esetén kereshetjük azt az $y = y(x)$ megoldást, melyre $y\left(x_0\right) = y_0$. Ezt a differenciálegyenlet egy kezdeti értéket kielégítő partikuláris megoldásának nevezzük.

Pl.: az (1) egyenlet esetén kérdezhetjük azt, hogy melyik az a megoldás, amelyiknél x=2 esetén y=15, vagy röviden: A megoldás függvények grafikonjai közül melyik megy át a (2, 15) koordinátájú ponton?
A választ úgy kapjuk, hogy az általános megoldásból meghatározzuk a feltételt kielégítő c konstanst (jelen esetben c=3).

**Példa**

Mutassuk meg, hogy az $y' = y - 2$

differenciálegyenletnek az általános megoldása az $y = 2 + e^{(x+c)}$ minden C∈**R** ahol x∈ $\left(-\infty, +\infty\right)$ valamint az $y \equiv 2$ függvény.

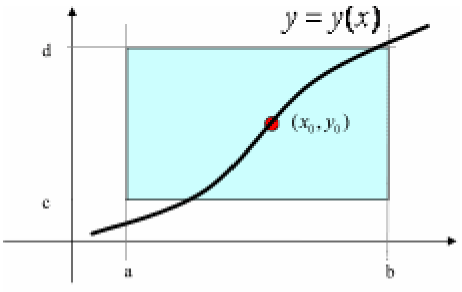
$y' = e^{(x+C)}$, $y - 2 = e^{(x+C)}$,

**Szétválasztható változójú differenciálegyenletek**

A következő alakú differenciálegyenleteket nevezzük szétválasztható változójúnak.

$y' = f(x) \cdot g(y)$ , ahol $f$ és $g$ folytonos függvények.

Ha azt mondjuk, hogy oldjuk meg a differenciál egyenletet, akkor az összes megoldására vagyunk kíváncsiak azon a tartományon, ahol $f$ és $g$ folytonosak, ez gyakran az egész számsík.
Legyen $f(x)$ folytonos $(a,b)$ intervallumon, $g(y)$ pedig $(c,d)$ intervallumon.




A megoldásokat ekkor az $\begin{Bmatrix} a < x < b \\ c < y < d \end{Bmatrix}$ tartományon keressük.

Ekkor a feladat megkeresni mindazokat az $y = y(x)$ függvényeket, melyekre
$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ egy rögzített (a,b) intervallum minden $x$ elemére.
**Megjegyzés**
Pontosabb írásmód az $y'(x) \equiv f(x) \cdot g(y(x))$, hiszen mindazokat a függvényeket keressük, melyek azonosan kielégítik a fenti egyenletet.
Mivel nem okoz félreértést, használni szokták mind a két írásmódot.
Az egyenletet át lehet rendezni azon a tartományon, ahol $g(y(x)) \neq 0$,

$\dfrac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$ alakúvá.

Legyen az $(a,b)$ intervallumon, $\dfrac{1}{g}$ függvény primitív függvénye $G$ és az $f$ függvény primitív függvénye $F$ (azaz $G' = \dfrac{1}{g}$ és $F' = f$ ) .
Akkor az egyenlet mindkét oldalát a primitív függvények segítségével írva

$G'(y) = F'(x)$ adódik, és innen

$$G(y) = F(x) + C,$$

a primitív függvényt határozatlan integrál segítségével írva kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

**Megjegyzés**: Ezt a formulát, a könnyebb megjegyzés érdekében, szokás a következő, matematikai értelemben jelentés nélküli, formális műveletsorozattal emlékezetbe vésni:

$y' = f(x)\cdot g(y)$, innen $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$, innen $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$ és innen

$\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ formulát kapjuk.

Összehasonlítva a fenti korrekt gondolatmenet alapján kapott formulával, látható, hogy ugyanazt a jelsorozatot kapjuk, de a benne szereplő műveleteknek nincs matematikai jelentése.

Folytatva a fenti levezetést, a $\int \dfrac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$ megoldásával kapjuk a szeparálható differenciálegyenlet általános megoldását.
Természetesen külön vizsgálatra szorulnak azok az esetek, amikor $g(y)$ azonosan nulla a tartományokon, vagy azokban a pontokban ahol g(y) nulla értéket vehet fel, hiszen az egyenlet  mindkét oldalát elosztottuk vele.

**Kidolgozott feladatok**

Adjuk meg $y' = x^2 y$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(0) = 1$ feltétel kielégítő partikuláris megoldást !
Más szavakkal, adjuk meg az $y' = x^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő összes görbét és a $(0,1)$ ponton átmenő megoldásgörbét.

**Megoldás**

$y' = x^2 y$, innen $\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$, azaz $\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$, ahol C tetszőleges valós konstans.

Innen $|y| = e^{\frac{x^3}{3}+C} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^C$, nevezzük el $e^C$ -t $C_1$-nek, ekkor $C_1$ tetszőleges pozitív valós szám ($e^C > 0$), tehát $|y| = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot C_1$ ($C_1 > 0$), és innen $y = \pm e^{\frac{x^3}{3}} C_1$ ahol vagyis

$y = e^{\frac{x^3}{3}} C_2$ ahol $C_2$ tetszőleges valós konstans ($C_2 \neq 0$).

Az általános megoldás tehát: $y = e^{\frac{x^3}{3}} C$ ahol $C \neq 0$ tetszőleges valós konstans.
Külön meg kell vizsgálni azt az esetet, amikor $y \equiv 0$, mert a $g(y) = y$ függvénnyel elosztottuk az egyenlet mindkét oldalát.
Látható, hogy az $y \equiv 0$ függvény megoldása a differenciálegyenletnek.
Ezután vizsgáljuk meg, hogy ezt speciális megoldást tartalmazza-e az előbb kapott általános megoldás. Ha nem, akkor ki kell egészíteni vele.
Láthatjuk, hogy az általános megoldás nem tartalmazza ezt, hiszen $C \neq 0$, de megkaphatjuk ezt a megoldást az általános megoldásból is ha C=0 értéket helyettesítünk.

Összevonva az általános megoldást ezzel a speciális megoldással kapjuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása:

$y = e^{\frac{x^3}{3}} C$, ahol C tetszőleges valós konstans.

A (0,1) ponton átmenő partikuláris megoldást úgy kapjuk, hogy az $y = e^{\frac{x^3}{3}} C$ egyenletbe x=0 és y=1 értékeket helyettesítünk. Tehát: $1 = e^0 C = C$

Vagyis a keresett partikuláris megoldás $y = e^{\frac{x^3}{3}}$

**Kidolgozott példa**

Adjuk meg $y' = -\dfrac{x}{y}$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(1) = 0$ feltétel kielégítő partikuláris megoldást !

Más szavakkal, adjuk meg az $y' = -\dfrac{x}{y}$ differenciálegyenletet kielégítő összes görbét (görbesereget) és a $(1,0)$ ponton átmenő megoldásgörbét.

**Megoldás**

$y' = -\dfrac{x}{y}$, innen $-\int y\,dy = \int x\,dx$, $-\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C$

azaz $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C_1$, ahol C1 tetszőleges pozitív valós konstans.

Az általános megoldás tehát: $x^2 + y^2 = C$ azaz egy origó körüli körsereg.

A (0,1) ponton átmenő partikuláris megoldást úgy kapjuk, hogy az $x^2 + y^2 = C$ egyenletbe x=1 és y=0 értékeket helyettesítünk. Tehát: $C = 1$

Vagyis a keresett partikuláris megoldás $x^2 + y^2 = 1$

**Példa**

Adjuk meg $y' = -\dfrac{y}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(1) = 2$ feltétel kielégítő partikuláris megoldást !

**Megoldás**

$\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C = \ln\dfrac{C}{|x|}$, $|y| = \dfrac{C}{|x|}$, ahol C>0,

$y = \dfrac{C}{x}$, ahol $C \neq 0$ valós. $y \equiv 0$ is megoldás, mely C=0 konstansra adódik az általános megoldásból. Tehát általános megoldás $y = \dfrac{C}{x}$, C tetszőleges valós szám.

Ha $y(1) = 2$, akkor $2 = \dfrac{C}{1}$, azaz $C = 2$, vagyis a keresett partikuláris megoldás $y = \dfrac{2}{x}$

**Példa**

Adjuk meg az $y' = \dfrac{(1+y^2)x}{(1+x^2)y}$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(1) = 2$ feltétel kielégítő partikuláris megoldást !

**Megoldás**

$y' = \frac{(1+y^2)x}{(1+x^2)y}$ innen $\int \frac{y}{(1+y^2)} dy = \int \frac{x}{(1+x^2)} dx$

azaz $\frac{1}{2}\int \frac{2y}{(1+y^2)} dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx$ innen $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

vagyis $\ln\sqrt{1+y^2} = \ln\sqrt{1+x^2} + \ln C$ , ( $C > 0$ )

vagyis $\ln\sqrt{1+y^2} = \ln(C\sqrt{1+x^2})$ innen $\sqrt{1+y^2} = C\sqrt{1+x^2}$ ,

$1+y^2 = C^2(1+x^2)$ $y^2 = C\ (1+x^2) - 1$

a partikuláris megoldás: $4 = C(1+1) - 1 = 2C - 1$, $2C = 5$, $C = \frac{5}{2}$

**Példa**
Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet típusát.
Adjuk meg $x \cdot y' + 2y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(3) = -1$ feltétel kielégítő partikuláris megoldást !
**Megoldás**

A differenciálegyenlet szétválasztható változójú. (de ugyanakkor elsőrendű lineáris homogén, lásd később)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x} dx$ $\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C_1$, $C_1 > 0$

tehát $y = \pm\frac{C_1}{x^2}$ innen $y = \frac{C}{x^2}$ ahol $C \in R$

A partikuláris megoldásra $y(3) = -1$, azaz $-1 = \frac{C}{9}$ ,

tehát a partikuláris megoldás $y = -\frac{9}{x^2}$

**Homogén és inhomogén lineáris differenciálegyenletek**

**Lineáris differenciálegyenlet**

Lineáris differenciálegyenletben $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$ rendre legfeljebb első hatványon szerepelnek,
Ha a keresett megoldásfüggvény $y(x)$ és deriváltjai $y', y'', ... y^{(n)}$ a differenciálegyenletben legfeljebb első hatványon szerepelnek, akkor az egyenletet lineárisnak nevezzük. Együtthatóik egyváltozós függvények. Pl: $x^2 y'' + xy' + 1 = x^3$

Tehát egy általános lineáris differenciálegyenlet

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Alakú, ahol az $a_i(x)$ függvények folytonosak egy (a,b) intervallumban

Például az alábbi egy

$$x^2 y'' + xy' + \frac{1}{x} y = x^3$$

**Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet**

Általános alakja: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

Ha $q(x) = 0$, akkor homogén lineárisnak nevezzük.
Ha $q(x) \neq 0$, akkor inhomogén lineárisnak nevezzük.

Jelölje $y_{\text{hom},ált}$ az $y' + p(x) \cdot y = 0$ homogén rész általános megoldását és $y_{in\text{hom},part}$ az $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

**Tétel**
Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege.

$$y_{in\text{hom},ált} = y_{\text{hom},ált} + y_{in\text{hom},part}$$

**Bizonyítás vázlat**.

Belátjuk, hogy az inhomogén egyenlet két különböző megoldásának különbsége, megoldása a homogén egyenletnek.

**Tétel**
A homogén egyenlet általános megoldása egy partikuláris megoldásának konstans szorosai.

Az egyenlet megoldása tehát két lépésből áll:
1. lépés a homogén rész általános megoldásának meghatározása. $y_{\text{hom},ált} = ?$

2. lépés az $y_{\text{hom},ált}$ ismeretében az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározása.

1. lépés: Az $y' + p(x) \cdot y = 0$ homogén lineáris rész mindig szeparálható, ezért

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx, \qquad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$$, ahonnan

$$y_{\text{hom},ált} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$ ahol C tetszőleges konstans

2. lépés: Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását olyan alakban, mint amilyen a homogén általános megoldása, csak a C konstans helyére egy egyelőre ismeretlen $C(x)$ függvényt helyettesítünk.

Azaz legyen $y_{in\hom, part} = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ alakú

Ezután a $C(x)$ ismeretlen függvényt úgy határozzuk meg, hogy az $y_{in\hom, part}$ függvényt és deriváltját az eredeti inhomogén egyenletbe helyettesítjük.

**Példa**

$y' + x^2 y = x^2$

A homogén rész

$y' + x^2 y = 0$ , megoldása $\dfrac{dy}{dx} = -x^2 y$ , azaz $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int x^2 dx$

vagyis $\ln|y| = -\dfrac{x^3}{3} + C$ , innen $|y| = e^C \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$ , ha $C_1 = e^c$ , akkor

$y = C_1 e^{-\frac{x^3}{3}}$ ahol $C_1 \neq 0$ tetszőleges valós konstans, mivel $y \equiv 0$ is megoldása a homogén egyenletnek, a megoldást kiegészíthetjük ezzel a megoldással, mely a $C_1 = 0$ konstans helyettesítésre adódik az általános megoldásból. Az egyszerűség kedvéért nevezzük $C$ -nek a konstanst az egyenletben.

A homogén egyenlet általános megoldása tehát $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$ ( $C \in R$ )

Ha valaki elég ügyes, akkor találgatással is találhat egy partikuláris megoldást az inhomogén egyenlethez és akkor már készen is van, mert csak hozzá kell adni a homogén egyenlet általános megoldásához.

Ha ez nem sikerül, biztosan találunk egyet úgy, hogy az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y = C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$ alakban keressük.
Ezt a módszert „állandó variálásának” nevezik.

Ekkor:

$y = C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$ , $y' = C'(x)e^{-\frac{x^3}{3}} + C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}\left(-x^2\right)$

Az $y' + x^2 y = x^2$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$C'(x)\cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + C(x)\cdot e^{-\frac{x^3}{3}}\left(-x^2\right) + x^2 C(x)\cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = x^2$$

A középső tagok szükségszerűen kiesnek (ha valakinek gyakorlás közben nem esik ki, akkor elszámolta!!!!)

$C'(x)\cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = x^2$, vagyis $C'(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$, $C(x) = \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx$

$C(x) = \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx = e^{\frac{x^3}{3}}$ ebben az esetben nem szükséges C hozzáadása, hiszen csak egyetlen megoldást keresünk.

Ez a megoldás tehát $y = C(x)\cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = \dfrac{dy}{dx} = 2y\, e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \quad e^{-\frac{x^3}{3}} = 1$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$ ($C \in R$)

**Ellenőrzés**

$$y = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

$$y' = Ce^{-\frac{x^3}{3}}(-x^2)$$

az $y' + x^2 y = x^2$ **e**gyenletbe helyettesítve

$$Ce^{-\frac{x^3}{3}}(-x^2) + x^2 \cdot \left( Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \right) = x^2$$

**Elsőrendű, állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet**

Általános alakja: $y' + b\cdot y = q(x)$ ahol b tetszőleges valós konstans.

Ha $q(x) = 0$, akkor **homogén** lineárisnak nevezzük.
Ha $q(x) \neq 0$, akkor **inhomogén** lineárisnak nevezzük.

Mivel ez egy speciális lineáris egyenlet, minden igaz rá amit a lineáris egyenletekről mondtunk. Tehát:

Az állandó együtthatós inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{in\hom,ált} = y_{\hom,ált} + y_{in\hom,part}$$

**Példa**

$$y' - 2y = x^2$$

A homogén egyenlet $y' - 2y = 0$ általános megoldása:

$\int \frac{dy}{y} = \int 2 \cdot dx$ , $\ln|y| = 2x + C$ , $y = Ce^{2x}$

Most is lehetne a fenti általános módszert (állandó variálása) alkalmazni, de ha a jobb oldalon a $q(x)$ függvény speciális, azaz vagy polinom, vagy , $e^{ax}$ vagy $\sin(cx)$ , vagy $\cos(dx)$ alakú, vagy ilyenek szorzatának összege, akkor a külső taghoz hasonló alakban keresve is könnyen célt érünk.

Jelen esetben a külső tag egy másodfokú polinom, ilyenkor, ha egy általános másodfokú polinom formájában keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, akkor biztosan találunk.

Legyen $y = Ax^2 + Bx + C$ , ekkor $y' = 2Ax + B$ , az inhomogén egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$y' - 2y = x^2$$

$2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C) \equiv x^2$ , azaz $-2Ax^2 + x(2A - 2B) + B - 2C \equiv x^2$

Innen:

$-2A = 1$, $2A - 2B = 0$, $B - 2C = 0$, vagyis $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$

Vagyis a partikuláris megoldás

$y_{in\hom,part} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ és $y_{in\hom,ált} = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

**Jó tanács**

Ha valaki meg akarja érteni a példán keresztül, hogy az ily módon kapott görbesereg, melyben egy konstans paraméter szerepel, ugyanaz mint az a görbesereg melyet az állandó variálásával kapnánk, oldja meg így is úgy is és vizsgálja meg, hogy ez egyik görbesereg egy tetszőleges görbéje eleme-e a másiknak és fordítva.

**Megoldandó feladatok**

Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

$$y^2 - 1 = (2y + xy)y'$$
$$xy' + y = y^2$$
$$2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$$
$$(x + xy^2)y' = 3$$
$$\sqrt{1 - y^2} = (1 - x^2)y'$$
$$yy' = \frac{e^x}{1 + e^x} \qquad y(1) = 1$$
$$y' = xy + x^3$$
$$y' \cos x + y \sin x = 1$$
$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$
$$y' + ythx = 6e^{2x}$$

**Másodrendű lineáris differenciálegyenlet.**

**Általános alakja:**

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x)y = q(x)$$

Ha $q(x) = 0$, akkor **homogén** lineárisnak nevezzük.

Ha $q(x) \neq 0$, akkor **inhomogén** lineárisnak nevezzük.

**Tétel**

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege.

$$y_{in\hom,ált} = y_{\hom,ált} + y_{in\hom,part}$$

**Bizonyítás vázlat**.

Belátjuk, hogy az inhomogén egyenlet két különböző megoldásának különbsége, megoldása a homogén egyenletnek.

**Tétel**

A homogén egyenlet általános megoldása két független (egymásnak nem konstans szorosa) partikuláris megoldásának lineáris kombinációja. Azaz ha $y_1$ és $y_2$ megoldásai a homogén egyenletnek, akkor

$C_1y_1 + C_2y_2$ is megoldás, ahol $C_1$ és $C_2$ valós konstansok.

**Példa**

$$x^2 y'' + xy' + \frac{1}{x} y = x^3$$

Ilyenek megoldásával nem foglakozunk, csak ha az együttható függvények konstansok.

**Másodrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet.**

**Általános alakja:**

$$y'' + a \cdot y' + by = q(x)$$

Ha $q(x) = 0$, akkor **homogén** lineárisnak nevezzük.
Ha $q(x) \neq 0$, akkor **inhomogén** lineárisnak nevezzük.

Mivel ez egy speciális lineáris egyenlet, minden igaz rá amit a lineáris egyenletekről mondtunk.

Tehát:

Az állandó együtthatós inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{in\hom,ált} = y_{\hom,ált} + y_{in\hom,part}$$

**Példa**

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$y'' + a \cdot y' + by = 0$$

**Példa**

$$y'' + y' - 2y = 0$$

A homogén egyenlet általános megoldását $y_{\hom,ált} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ alakban keressük, ahol $y_1$ és $y_2$ a homogén egyenlet két független megoldása azaz ( $y_1 \neq c \cdot y_2$ ).

Feltételezzük, hogy mindkét megoldás valamilyen $\lambda$-ra $e^{\lambda x}$ alakú. Azért ezt feltételezzük, mert ha $y = e^{\lambda x}$, akkor $y'$ is és $y''$ is $y$-tól konstans szorzóban tér el ( $y' = \lambda e^{\lambda x}$ és $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ), a differenciálegyenlet pedig konstans együtthatós.

Vagyis legyen $y = e^{\lambda x}$, ekkor ezt a homogén a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$, innen $e^{\lambda x}$-et kiemelve kapjuk, hogy

$e^{\lambda x}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)=0$, innen a $\lambda^2+a\lambda+b$ a karakterisztikus egyenlet, melynek gyökeire nézve három eset lehetséges:

1. A $\lambda^2+a\lambda+b$ egyenletnek $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyöke van. Ebben az esetben már van is a homogén egyenletnek két független megoldása $y_1=e^{\lambda_1 x}$ és $y_2=e^{\lambda_2 x}$

ekkor a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_{\text{hom},\acute{a}lt}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

2. A $\lambda^2+a\lambda+b$ egyenletnek $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ valós megoldása van.

Ekkor csak egy megoldás van, $e^{\lambda x}$.

Lássuk be, hogy $y_2=x\cdot e^{\lambda x}$ is megoldása a homogén egyenletnek.

**Bizonyítás:**

$y_2=x\cdot e^{\lambda x}$, $y_2{}'=e^{\lambda x}+x\cdot\lambda e^{\lambda x}=e^{\lambda x}(1+\lambda x)$,

$y_2{}''=\lambda e^{\lambda x}(1+\lambda x)+e^{\lambda x}\lambda=\lambda e^{\lambda x}(2+\lambda x)$, ezeket visszahelyettesítve a $y''+a\cdot y'+by=0$ homogén egyenletbe kapjuk, hogy

$\lambda e^{\lambda x}(2+\lambda x)+ae^{\lambda x}(1+\lambda x)+bxe^{\lambda x}=0$, azaz

$$e^{\lambda x}\left(\lambda(2+\lambda x)+a(1+\lambda x)+bx\right)=0$$

$$e^{\lambda x}\left(2\lambda+\lambda^2x+a+\lambda ax+bx\right)=0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2x+\lambda ax+bx+2\lambda+a\right)=0$$

$e^{\lambda x}\left(x(\lambda^2+\lambda a+b)+2\lambda+a\right)=0$, de mivel $\lambda^2+\lambda a+b=0$, így

$e^{\lambda x}\left(2\lambda+a\right)=0$ ,adódik. Mivel $\lambda$ kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek $2\lambda+a=0$ ugyanos a megoldó képletből $\lambda=-\dfrac{a}{2}$ hiszen a diszkrimináns =0

Tehát ebben az esetben $y_2=x\cdot e^{\lambda x}$ is megoldása a homogén egyenletnek.

Ekkor a homogén egyenlet általános megoldása.

$$y_{\text{hom},\acute{a}lt}=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$$

3. A karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke. Ebben az esetben konjugált komplex gyökei vannak.

   Legyenek a gyökök $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

   Ekkor $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ független megoldások, de nem valósak $e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x}$

   De mi valós megoldásokat keresünk!

   Tudjuk, hogy megoldások összege és konstans szorosa is megoldás. Felhasználva az Euler formulát, mely szerint: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

   *Az Euler formula bizonyítása - komplex hatványsorok segítségével - később szerepel. Egyelőre bizonyítás nélkül elfogadjuk.*

   E szerint

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{\lambda_2 x} &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{aligned} \quad (1)$$

   a két megoldást összeadva újra megoldást kapunk, vagyis

   $e^{\lambda_1 x}$ + $e^{\lambda_2 x}$ = $2e^{\alpha x}\cos\beta x$ is megoldás, kettővel osztva kapjuk, hogy $e^{\alpha x}\cos\beta x$ is megoldás és valós!

   Ha az (1) első egyenlet $-i$ vel és a másodikat $i$ -vel megszorozzuk és összeadjuk, akkor kapjuk, hogy $2e^{\alpha x}\sin\beta x$ is és $e^{\alpha x}\sin\beta x$ is megoldás.

   Tehát $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ és $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ független megoldások, tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{\text{hom},ált} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2\cos\beta x$$

   A másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása is a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege:

$$y_{in\,\text{hom},ált} = y_{\text{hom},ált} + y_{in\,\text{hom},part}$$

**Másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásának megtalálása speciális külső tag esetén, próba függvénnyel.**

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását un. speciális külső tagok esetében tudjuk könnyen meghatározni.

Az $y'' + a\cdot y' + by = q(x)$ egyenletben $q(x)$ függvényt szokás külső tagnak nevezni. Azzal az esettel, amikor a külső tag nem speciális nem foglalkozunk.

Speciális külső tagnak nevezzük a $q(x)$ függvényt, ha $p_n(x)\cdot e^{ax}\cos bx$ vagy $p_n(x)\cdot e^{ax}\sin bx$ alakú, ahol $p_n(x)$ tetszőleges n-ed fokú polinom. Ebben az esetben az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását speciális alakú, ismeretlen együtthatókat tartalmazó függvény (próbafüggvény) alakjában keressük, az ismeretlen együtthatókat pedig úgy határozzuk meg, hogy őt, a deriváltját és a második deriváltját visszahelyettesítjük az eredeti inhomogén egyenletbe.

**A próbafüggvény általános alakja:**

1. $P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_n(x)e^{ax}\sin bx$ ha $a+bi$ nem gyöke a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenletnek $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinomok.

.

A helyzetet csak az bonyolítja, ha $a+bi$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ezt rezonancia jelenségnek nevezik.

**Összefoglalva:**

2. Ha a $q(x)$ külső tag $p_n(x)\cdot e^{ax}$ alakú (a valós) és az $e^{ax}$ kitevőjében szereplő $a$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz $e^{ax}$ nem megoldása a homogén differenciálegyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $P_n(x)e^{ax}$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinom.
3. Ha az $e^{ax}$ kitevőjében szereplő $a$ egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz $e^{ax}$ megoldása a homogén differenciálegyenletnek (egyszeres rezonancia), akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x\ P_n(x)e^{ax}$ alakban, ha kétszeres gyöke (kétszeres rezonancia) akkor $x^2\ P_n(x)e^{ax}$ keressük, ahol $P_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinom. Ezt nevezzük **rezonanciának**.
4. Ha a $q(x)$ külső tag $p_n(x)\cdot e^{ax}\sin bx$ vagy $p_n(x)\cdot e^{ax}\cos bx$ alakú (a, b valós) és az $e^{(a+bi)x} = e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right)$ formulában a kitevőjében szereplő $a+bi$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $P_n(x)e^{ax}\sin bx\ + Q_n(x)e^{ax}\cos bx$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinomok.
5. Ha az $e^{(a+bi)x}$ kitevőjében szereplő $a+bi$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x\cdot P_n(x)e^{ax}\sin bx$ $+\,x\cdot Q_n(x)e^{ax}\cos bx$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinomok.

Ha a $q(x)$ külső tag ezen speciális tagok összege, akkor a próba függvény a hozzájuk tartozó próba függvények összege.

**A következő táblázat összefoglalja a speciális eseteket**

**Jelölések:** az alábbi táblázatban $p_n(x)$ jelöl egy konkrét n-ed fokú polinomot, $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ pedig egy ugyancsak n-ed fokú, de ismeretlen együtthatós polinomot jelöl. $\lambda_1$ és $\lambda_2$ jelöli a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeit.

| $q(x)$ | példa | Próba függvény | példa |
|---|---|---|---|
| $p_n(x)$ | $x^2$ | $P_n(x)$ ha $\lambda_1 \neq 0$ és $\lambda_2 \neq 0$ | $Ax^2 + Bx + C$ |
| $p_n(x)$ | $x^2$ | $x \cdot P_n(x)$ ha $\lambda_1 = 0$ vagy $\lambda_2 = 0$ | $x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$ |
| $e^{ax}$ | $e^{3x}$ | $Ae^{ax}$ ha $\lambda_1 \neq a$ és $\lambda_2 \neq a$ | $A \cdot e^{3x}$ ha $\lambda_1 \neq 3$ és $\lambda_2 \neq 3$ |
| $e^{ax}$ | $e^{3x}$ | $xAe^{ax}$ ha $\lambda_1 = a$ és $\lambda_2 \neq a$ | $A \cdot x \cdot e^{3x}$ ha $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 \neq 3$ |
| $e^{ax}$ | $e^{3x}$ | $x^2 Ae^{ax}$ ha $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ | $A \cdot x^2 \cdot e^{3x}$ ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ |
| $p_n(x)\ e^{ax}$ | $2x \cdot e^{-x}$ | $P_n(x)e^{ax}$ ha $\lambda_1 \neq a$ és $\lambda_2 \neq a$ | $(Ax+B)e^{-x}$ ha $\lambda_1 \neq -1$ és $\lambda_2 \neq -1$ |
| $p_n(x)\ e^{ax}$ | $x \cdot e^{-x}$ | $x \cdot P_n(x)e^{ax}$ ha $\lambda_1 = a$ és $\lambda_2 \neq a$ | $x(Ax+B)e^{-x}$ ha $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 \neq -1$ |
| $p_n(x)\ e^{ax}$ | $x \cdot e^{-x}$ | $x^2 P_n(x) \cdot e^{ax}$ ha $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ | $x^2 (Ax+B)e^{-x}$ ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ |
| $\cos bx$ | $\cos 2x$ | $A\cos bx + B\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq bi$ | $A\cos 2x + B\sin 2x$ ha $\lambda_1 \neq 2i$ |
| $\sin bx$ | $\sin 3x$ | $A\cos bx + B\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq bi$ | $A\cos 3x + B\sin 3x$ ha $\lambda_1 \neq 3i$ |
| $\cos bx$ | $\cos 2x$ | $x\left(A\cos bax + B\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = bi$ | $x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ ha $\lambda_1 = 2i$ |
| $\sin bx$ | $\sin 3x$ | $x(A\cos bx + B\sin bx)$ ha $\lambda_1 = bi$ | $x(A\cos 3x + B\sin 3x)$ ha $\lambda_1 = 3i$ |
| $p_n(x)\ \sin bx$ | $(5x+2)\sin x$ | $P_n(x)\ \cos bx + Q_n(x)\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq bi$ | $(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$ ha $\lambda_1 \neq i$ |
| $p_n(x)\ \cos bx$ | $(4x-2)\cos 2x$ | $P_n(x)\ \cos bx + Q_n(x)\sin bx$ $\lambda_1 \neq bi$ | $(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$ ha $\lambda_1 \neq 2i$ |
| $p_n(x)\ \sin bx$ | $(4x-1)\sin x$ | $x\left(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = bi$ | $x(Ax+B)\cos x + x(Cx+D)\sin x$ ha $\lambda_1 = i$ |
| $p_n(x)\ \cos bx$ | $(3x+1)\cos x$ | $x\left(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = bi$ | $x(Ax+B)\cos x + x(Cx+D)\sin x$ ha $\lambda_1 = i$ |
| $e^{ax}\sin bx$ | $e^{2x}\sin 3x$ | $Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq a+bi$ | $Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 \neq 2+3i$ |
| $e^{ax}\cos bx$ | $e^{2x}\cos 3x$ | $Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq a+bi$ | $Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 \neq 2+3i$ |
| $e^{ax}\sin bx$ | $e^{2x}\sin 3x$ | $x\left(Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = a+bi$ | $xA \cdot e^{2x}\cos 3x + xB \cdot e^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 = 2+3i$ |
| $e^{ax}\cos bx$ | $e^{2x}\cos 3x$ | $x\left(Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = a+bi$ | $xAe^{2x} \cdot \cos 3x + xBe^{2x} \cdot \sin 3x$ ha $\lambda_1 = 2+3i$ |
| $p_n(x) \cdot e^{ax}\cos bx$ | $xe^{2x}\cos 3x$ | $P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_n(x)e^{ax}\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq a+bi$ | $(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + (Cx+D)e^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 \neq 2+3i$ |
| $p_n(x) \cdot e^{ax}\sin bx$ | $xe^{2x}\sin 3x$ | $P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_n(x)e^{ax}\sin bx$ ha $\lambda_1 \neq a+bi$ | $(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + (Cx+D)e^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 \neq 2+3i$ |
| $p_n(x) \cdot e^{ax}\cos bx$ | $xe^{2x}\cos 3x$ | $x\left(P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_n(x)e^{ax}\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = a+bi$ | $x(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + x(Cx+D)e^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 = 2+3i$ |
| $p_n(x) \cdot e^{ax}\sin bx$ | $xe^{2x}\sin 3x$ | $x\left(P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_n(x)e^{ax}\sin bx\right)$ ha $\lambda_1 = a+bi$ | $x(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + x(Cx+D)e^{2x}\sin 3x$ ha $\lambda_1 = 2+3i$ |

Például.:

a=0 eset $e^{0x} = 1$, ezért a rezonanciát az okozza, ha $\lambda = 0$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek lásd 2. eset

$p_n(x) \equiv 1$ azaz egy 0-ad fokú polinom, tehát az inhomogén partikuláris megoldás alakja egy általános 0-ad fokú polinom és $e^{ax}$ szorzata.

**Kidolgozott feladatok**

**1.** $y'' + y' - 2y = x^2$,
a homogén egyenlet $y'' + y' - 2y = 0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, megoldásai $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\hom,ált} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = Ax^2 + Bx + C$ alakban keressük. (táblázat 1. sor)
$y_p{}' = 2Ax + B$, $y_p{}'' = 2A$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve,
$2A + 2Ax + B - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) \equiv x^2$, rendezve
$-2Ax^2 + x\left(2A - 2B\right) + 2A - 2C + B \equiv x^2$
és az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $-2A = 1$, $2A - 2B = 0$,
$2A - 2C + B$ =0, innen $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $C = -\dfrac{3}{2}$
Tehát $y_p = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$y_{in\hom,ált} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

2. $y'' + y' = x^2$
a homogén egyenlet $y'' + y' = 0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + \lambda = 0$, megoldásai $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\hom,ált} = C_1 e^0 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, azaz
$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ alakban keressük. (táblázat 2. sor)
$y_p{}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_p{}'' = 6Ax + 2B$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve
$6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C \equiv x^2$ és rendezve $3Ax^2 + \left(6A + 2B\right)x + 2B + C \equiv x^2$
az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $3A = 1$, $6A + 2B = 0$, $2B + C = 0$

$A = \dfrac{1}{3}$, $B = -1$, $C = 2$
Tehát $y_p = x \cdot \left(\dfrac{1}{3}x^2 - x + 2\right)$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{in\hom,ált} = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ *(javította: Hadnagy Dániel)*
3. $y'' + y' - 2y = e^{2x}$,
a homogén egyenlet $y'' + y' - 2y = 0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda-2=0$, megoldásai $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\mathrm{hom},ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=A\cdot e^{2x}$ alakban keressük. (táblázat 3. sor)
$y_p{}'=2A\cdot e^{2x}$, $y_p{}''=4A\cdot e^{2x}$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve,
$4A\cdot e^{2x}+2A\cdot e^{2x}-2\left(Ae^{2x}\right)\equiv e^{2x}$, kiemelve $e^{2x}\left(4A+2A-2A\right)\equiv e^{2x}$
innen következik, hogy $4A=1$, $A=\frac{1}{4}$
Tehát $y_p=\frac{1}{4}e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$y_{in\mathrm{hom},ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$

4. $y''+y'-2y=e^{-2x}$,
a homogén egyenlet $y''+y'-2y=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda-2=0$, megoldásai $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\mathrm{hom},ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=x\cdot A\cdot e^{-2x}$ alakban keressük. (táblázat 4. sor)
$y_p{}'=A\left(x\cdot(-2)\cdot e^{-2x}+\cdot e^{-2x}\right)=Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)$,
$y_p{}''=A\left((-2)\cdot e^{-2x}\left(-2x+1\right)+\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)+Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)-2\left(x\cdot A\cdot e^{-2x}\right)\equiv e^{-2x}$,
kiemelve $Ae^{-2x}\left(4x-4-2x+1-2x\right)\equiv e^{-2x}$, azaz $Ae^{2x}\left(-3\right)\equiv e^{2x}$
innen következik, hogy $-3A=1$, $A=-\frac{1}{3}$
Tehát $y_p=-\frac{1}{3}x\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$y_{in\mathrm{hom},ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-2x}$

5. $y''-2y'+y=e^x$,
a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\mathrm{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=x^2\cdot A\cdot e^x$ alakban keressük. (táblázat 5. sor)
$y_p{}'=A\left(x\cdot(-2)\cdot e^{-2x}+\cdot e^{-2x}\right)=Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)$,
$y_p{}''=A\left((-2)\cdot e^{-2x}\left(-2x+1\right)+\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)+Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)-2\left(x\cdot A\cdot e^{-2x}\right)\equiv e^{-2x}$,
kiemelve $Ae^{-2x}\left(4x-4-2x+1-2x\right)\equiv e^{-2x}$, azaz $Ae^{2x}\left(-3\right)\equiv e^{2x}$

innen következik, hogy $-3A=1$, $A=-\frac{1}{3}$

Tehát $y_p=-\frac{1}{3}x\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1e^x+C_2xe^x-\frac{1}{3}e^{-2x}$

6. $y''-2y'+y=xe^{2x}$,

a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,

az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=\left(Ax+B\right)\cdot e^{2x}$ alakban keressük. (táblázat 6. sor)

$y_p{}'=Ae^{2x}+\left(Ax+B\right)2e^{2x}=e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)$,

$y_p{}''=2e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)+e^{2x}\left(2A\right)=4e^{2x}\left(Ax+A+B\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $4e^{2x}\left(Ax+A+B\right)-2e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)+\left(Ax+B\right)e^{2x}\equiv xe^{2x}$,

kiemelve $e^{2x}\left(4Ax+4A+4B-4Ax-2A-4B+Ax+B\right)\equiv e^{-2x}$, azaz

$e^{2x}\left(Ax+2A+B\right)\equiv xe^{2x}$

innen következik, hogy $A=1$, $2A+B=0$, $B=-2$

Tehát $y_p=(x-2)\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1e^x+C_2xe^x+(x-2)\cdot e^{2x}$

7. $y''-2y'+y=\sin 2x$ a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda=0$, megoldásai $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,ált}=C_1e^0+C_2e^{-x}=C_1+C_2e^{-x}$,

az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$, azaz (táblázat 10. sor)

$y_p{}'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$, $y_p{}''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$-4A\sin 2x-4B\cos 2x-2\left(-4A\sin 2x-4B\cos 2x\right)+A\sin 2x+B\cos 2x\equiv\sin 2x$ és

$-4A\sin 2x-4B\cos 2x+\left(8A\sin 2x+8B\cos 2x\right)+A\sin 2x+B\cos 2x\equiv\sin 2x$ és

$5A\sin 2x+5B\cos 2x\equiv\sin 2x$

rendezve $5A\sin 2x\equiv\sin 2x$

az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $-4A-2B=1$, $2A+4B=0$,

$A=\frac{1}{5}$, $B=0$ ,Tehát $y_p=\frac{1}{5}\sin 2x$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x$

**Kidolgozott példák**

Adja meg az általános megoldást!

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + \left(x^2 + x\right)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) \qquad y_{\mathrm{hom},ált} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} =$$

$$y_p := Ae^{3x} + \left(Bx^2 + Cx + D\right) \Big| \cdot 2$$

$$y_p{}' = 3Ae^{3x} + 2Bx + C \Big| \cdot (-3)$$

$$y_p{}'' = 9Ae^{3x} + 2B \Big| \cdot 1$$

$$(9A - 9A + 2A)e^{3x} + x^2(2B) + x(2C - 6B) + (2D - 3C + 2B) \equiv a^{3x} + \left(x^2 + x\right)$$

$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 2$, $D = \frac{5}{2}$

**Tehát**

$$y_{in\mathrm{hom},ált} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2} e^{3x} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}$$

Adja meg az általános megoldást!

$$y'' + 8y' + 25y = e^{-4x}$$

**A karakterisztikus egyenlet**

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

**A homogén egyenlet általános megoldása**

$$y_{hom,ált} = C_1 e^{-4x} \cos 3x + C_2 e^{-4x} \sin 3x$$

$y_p = Ae^{-4x}$ **(**nincs rezonancia, akkor lenne, ha a külső tag $e^{-4x}\cos 3x$ vagy $e^{-4x}\sin 3x$ lenne)

$y_p{}' = -4Ae^{-4x}$**,** $y_p{}' = 16Ae^{-4x}$ visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$(25A - 32A + 16A)e^{-4x} \equiv e^{-4x}$, azaz $A = \frac{1}{9}$

Tehát

$$y_{inhom,ált} = C_1 e^{-4x} \cos 3x + C_2 e^{-4x} \sin 3x + \frac{1}{9} e^{-4x}$$