Szélsőérték feladatok megoldása

A $z = f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékének meghatározása:

A. Szükséges feltétel:

$$f'_x(x, y) = 0$$
$$f'_y(x, y) = 0$$

egyenletrendszer megoldása, amire a továbbiakban az $x = a$, $y = b$ jelölést alkalmazzuk.

B. Elegendő feltétel:

$$f''_{xx}(a, b)\, f''_{yy}(a, b) - {f''_{xy}}^2(a, b) = D$$

Táblázatba foglalva az elégséges feltételeket:

D	> 0	> 0	< 0	$= 0$
f''_{xx}, f''_{yy}	> 0	< 0	nincs lokális szélsőérték	nem dönthető el, hogy van-e szélsőérték
$f(x, y)$-nak az (a, b) helyen	lokális min.-a van	lokális max.-a van		

Feladatok:

1) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények helyi szélsőértékeit!

a) $f(x, y) = x^3y^2(4 - x - y)$
A megfelelő deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 12x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(12 - 4x - 3y) = 0$$
$$f'_y(x, y) = 8x^3y - 2x^4y - 3x^2y^2 = x^3y(8 - 2x - 3y) = 0$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

i) $x = 0$, y tetszőleges. (Azaz az y tengely.)
ii) $y = 0$, x tetszőleges. (Azaz az x tengely.)
iii) $x = 2$, $y = \dfrac{4}{3}$

A szélsőérték típusához elő kell állítani a második deriváltakat:

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 24xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 \\ f''_{yy} &= 8x^3 - 2x^2 - 6x^3y \\ f''_{xy} &= 24x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \end{aligned}\right\}$$

A könnyen behelyettesíthető i) és ii) esetben a deriváltmátrix determinánsa $D = 0$, vagyis ezekben az esetekben nem dönthető el a szélsőérték fajtája.

Az iii) esetben a behelyettesítés:

$$f''_{xx}\left(2,\frac{4}{3}\right) = -28{,}44$$
$$f''_{yy}\left(2,\frac{4}{3}\right) = -32$$
$$f''_{xy}\left(2,\frac{4}{3}\right) = -21{,}33,$$

innen a determináns: $D = 28{,}44 \cdot 32 - 454{,}96 = 910{,}08 - 454{,}98 > 0$, valamint $f_{xx} < 0$, tehát az $f(x,y)$-nek az $\left(2,\frac{4}{3}\right)$ pontban lokális maximuma van.

b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
A deriváltak:

$$f'_x = 2x - y + 3 = 0$$
$$f'_y = -x + 2y - 4 = 0$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$, ami a lehetséges szélsőérték hely. A második deriváltak: $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{xy} = -1$, vagyis a determináns $D > 0$, és mivel $f_{xx} > 0$, ezért a függvénynek a $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ helyen lokális minimuma van.

c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$
A deriváltak:

$$f'_x = 2x + y - \frac{8}{x^2} = 0$$
$$f'_y = x + 2y - \frac{8}{y^2} = 0$$

Az egyenletek összegét és különbségét képezve az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$3(x+y) = \frac{8}{x^2} + \frac{8}{y^2}$$
$$x - y = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{y^2}$$

Először is, azt a megállapítást tesszük az első egyenlet alapján, hogy $x + y > 0$, hiszen a jobb oldal pozitív. Ezután a különbségi egyenletet felszorozzuk x^2y^2-nel. (Ez megtehető, hiszen az eredeti függvény értelmezési tartományában sincs benne az $x = 0$ és $y = 0$.) Ekkor kapjuk:

$$x^2y^2(x-y) = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{y^2},$$

ahonnan átrendezéssel és az $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ nevezetes azonosság felhasználásával adódik, hogy

$$(x-y)\underbrace{\left[x^2y^2 + 8(x+y)\right]}_{\substack{>0 \text{ a fenti megállapítás} \\ \text{miatt}}} = 0$$

Innen tehát az következik, hogy $x = y$. Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$3x - \frac{8}{x^2} = 0 \Longrightarrow 3x^3 - 8 = 0 \Longrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

A lehetséges egyetlen szélsőérték hely tehát: $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)$. A második deriváltak a megfelelő visszahelyettesítéssel:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 + \frac{16}{x^3} = 2 + \frac{16}{8} = 8 \\ f_{yy} &= 2 + \frac{16}{y^3} = 2 + \frac{16}{8} = 8 \\ f_{xy} &= 1, \end{aligned}$$

Innen $D = 63 > 0$, és $f_x > 0$, ezért a $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)$ helyen lokális minimuma van a függvénynek.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
A deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadjuk. Ezután az alábbi átalakításokkal élünk:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + (x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+1) &= 0 \end{aligned}$$

Ebből az egyik eset, ha $x = y$, amiből visszahelyettesítés után $x^2 - x = 0$, aminek a megoldásai: $x = y = 0$ és $x = y = 1$. A másik eset, ha $x + y + 1 = 0$, amiből visszahelyettesítés után:

$$\begin{aligned} y^2 - [-(1+y)] &= 0 \\ y^2 + y + 1 &= 0 \\ D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &< 0, \end{aligned}$$

vagyis ekkor nincs valós gyök.

A második deriváltak:

$$f''_{xx} = 6x$$
$$f''_{yy} = 6y$$
$$f''_{xy} = -3$$

Az $(1,1)$ helyen $D = 36 - 9 = 27 > 0$, valamint $f_{xx} > 0$ és $f_{yy} > 0$ miatt a függvénynek itt minimuma van.
A $(0,0)$ helyen az $D = -3 < 0$, vagyis nincs szélsőérték.

e) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)$
Az első deriváltak:

$$f'_x = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\left(2x^2+3y^2\right)+4x\right) = 0$$
$$f'_y = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\left(2x^2+3y^2\right)+6y\right) = 0$$

Az exponenciális függvény sehol sem 0, vagyis a zárójelekben álló kifejezések nullák. Az első egyenletből x-et, a másodikból y-t kiemelünk:

$$x\left(-4x^2-6y^2+4\right) = 0$$
$$y\left(-4x^2-6y^2+4\right) = 0$$

Mivel $4x^2+6y^2$ nem lehet egyszerre egyenlő 4-gyel és 6-tal, ezért csak $x = y = 0$ jöhet szóba, mint a szélsőérték helye. A második deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^{-x^2-y^2}\left[-2x^2\left(-4x^2-6y^2+4\right)+\left(-4x^2-6y^2+6\right)\right] \\ &= e^{-x^2-y^2}\left(-4x^2-6y^2+4\right)\left(-2x^2+1\right)\Big|_{(0,0)} = 4 \\ f''_{yy} &= e^{-x^2-y^2}\left(-4x^2-6y^2+6\right)\left(-2y^2+1\right)\Big|_{(0,0)} = 6 \\ f''_{xy} &= e^{-x^2-y^2}\left[-2xy\left(-4x^2-6y^2+4\right)-12x\right]\Big|_{(0,0)} = 0 \end{aligned}$$

Ekkor $D = 24 > 0$, $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$, a $(0,0)$ hely tehát lokális minimumhely.

f) $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$
Az első deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x &= -\sin x \cos y \cos(x+y) - \cos x \cos y \sin(x+y) = \\ &= -\cos y\left[\sin x \cos(x+y) + \cos x \sin(x+y)\right] = -\cos y \sin(2x+y) = 0 \\ f'_y &= -\cos x \sin(x+2y) = 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldását négy esetre tudjuk bontani:

i) $\cos x = 0$, $\cos y = 0$. Megoldás: $x = y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

ii) $\cos x = 0$, $\sin(2x+y) = 0$. Megoldás:

iii) $\sin(x+2y)=0$, $\cos y=0$.

iv) $\sin(2x+y)=0$, $\sin(x+2y)=0$.

A második deriváltak:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= -2\cos y\cos(2x+y)\\
f''_{yy} &= -2\cos x\cos(x+2y)\\
f''_{xy} &= \sin y\sin(2x+y)-\cos y\cos(2x+y)=-\cos(2x+2y)
\end{aligned}
$$

Az előző eseteket behelyettesítve:

i) $x=y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$: Ekkor $f''_{xx}=f''_{yy}=0$, valamint $f''_{xy}=-\cos(\pi+2k\pi+\pi+2n\pi)=-\cos(2\pi)=1$. Ezek szerint a determináns: $D=0-1^2=-1<0$, azaz itt nincs lokális szélsőérték.

ii) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, ahonnan $\sin(2x+y)=0$ miatt (kis számolás után) $D=-1<0$ következik, azaz itt sincs lokális szélsőérték.

iii) Ebben az esetben az ii)-hez hasonlóan $D<0$ miatt nincs lokális szélsőérték.

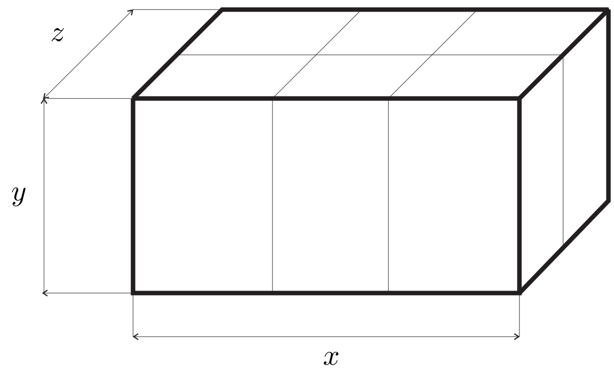
iv) A megoldandó egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
\sin(2x+y)=0 &\Longrightarrow 2x+y=k\pi\\
\sin(x+2y)=0 &\Longrightarrow x+2y=n\pi
\end{aligned}
$$

Innen átrendezéssel kapjuk, hogy $y=\dfrac{(2n-k)\pi}{3}$ és $x=\dfrac{(2k-n)\pi}{3}$. Különböző megoldásokhoz vezetnek az $[0,2\pi]$ intervallumon az (n,k) számpárok közül az alábbiak: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Ezeket visszahelyettesítve a második deriváltakba az derül ki, hogy $D>0$. Az egyes második deriváltak előjele alapján maximumok: $(x,y)=(0,0),(0,\pi),(\pi,0),(\pi,\pi)$,
és a minimumok: $(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right),\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Szöveges szélsőérték feladatok

2) Egy $V=4{,}5\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú, téglatest alakú csomagot a rajzon látható módon kötözzük át zsineggel. Milyennek válasszuk a csomag méreteit, hogy a legkevesebb zsinegre legyen szükségünk?



A csomagoláshoz felhasznált zsineg hossza:

$$l = 2x + 6y + 4z,$$

ezen kívül a test térfogata:

$$xyz = 4{,}5 \Longrightarrow 4z = \frac{18}{xy}$$

Ez utóbbival felírva az l:

$$l = f\left(x, y\right) = 2x + 6y + \frac{18}{xy} \quad x > 0, \quad y > 0$$

Az első deriváltak:

$$f'_x = 2 - \frac{18}{x^2 y} = 0$$

$$f'_x = 6 - \frac{18}{x y^2} = 0$$

Ezeket a nevezővel felszorozhatjuk:

$$2x^2 y - 18 = 0$$

$$6xy^2 - 18 = 0$$

E két egyenletet egyenlővé téve és leosztva $2xy$-nal, az derül ki, hogy $x = 3y$. Ezt visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe, kapjuk:

$$18y^3 - 18 = 0$$

Innen $y = 1$, $x = 3$ és $z = 1,,5$ következik. A második deriváltak:

$$f''_{xx} = \left.\frac{36}{x^3 y}\right|_{(3,1)} = \frac{4}{3} > 0$$

$$f''_{yy} = \left.\frac{36}{x y^3}\right|_{(3,1)} = 12 > 0$$

$$f''_{xy} = \left.\frac{18}{x^2 y^2}\right|_{(3,1)} = 2$$

Vagyis $D > 0$, ami miatt az $(x, y, z) = (3, 1, 1{,}5)$ a lokális minimum, ami egyben abszolút minimum is.

3) Határozzuk meg annak a derékszögű hasábnak a maximális térfogatát, amelynek éleinek összege l!
Az élek összege, valamint a térfogat:

$$\begin{aligned} l &= 4\,(x + y + z) \\ V &= xyz \end{aligned}$$

Az élek hosszából kifejezve z-t és térfogatba helyettesítve kapjuk a célfüggvényt:

$$f\,(x, y) = xy\left(\frac{l}{4} - x - y\right),$$

melynek deriváltjai:

$$\begin{aligned} f'_x &= y\left(\frac{l}{4} - x - y\right) - xy = y\left(\frac{l}{4} - 2x - y\right) = 0 \\ f'_y &= x\left(\frac{l}{4} - x - y\right) - xy = x\left(\frac{l}{4} - x - 2y\right) = 0 \end{aligned}$$

Miután az x és y egy téglatest élei, ezért $x > 0{,}y > 0$, ami miatt a fenti két egyenletben csak a zárójeles kifejezések lehetnek zérusok. Ezeket összeadva gyorsan adódik a megoldás: $x = y = \dfrac{l}{12}$. A második deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2y = -\frac{l}{6} < 0 \\ f''_{yy} &= -2x = -\frac{l}{6} < 0 \\ f''_{xy} &= -\frac{l}{12} \end{aligned}$$

$D = \dfrac{l^2}{36} - \dfrac{l^2}{144} > 0$ és a fenti, második deriváltakra érvényes relációk miatt itt lokális maximum van. $z = \dfrac{l}{12}$, vagyis a hasáb egy kocka.

4) Egy másolófülke térfogata adott, $K\,\mathrm{mm}^3$. Alakja derékszögű hasáb. A fülkét elölről nem kell elhatárolni, tehát a hasáb egyik oldallapja hiányzik. Hogyan méretezzük a fülkét, hogy a lehető legkevesesebb falra legyen szükség?
A térfogat rögzített, melynek segítségével kifejezhető a z oldal:

$$K = xyz \Longrightarrow z = \frac{K}{xy}$$

A célfüggvény, azaz a fal felülete:

$$F = 2xy + 2xz + yz = 2xy + 2K\frac{1}{y} + K\frac{1}{x} = f\,(x, y)$$

Az első deriváltak:

$$f'_x = 2y - K\frac{1}{x^2} = 0$$
$$f'_y = 2x - K\frac{1}{y^2} = 0$$

Ezek átrendezése után és felhasználva, hogy $K = xyz$, kapjuk, hogy:

$$y - x = \frac{z}{2}$$
$$x + y = \frac{3z}{2}.$$

Ezek összegéből és különbségéből az következik, hogy $y = z$ és $x = \frac{z}{2}$. Az x, y, z-t kifejezve ez alapján K-val:

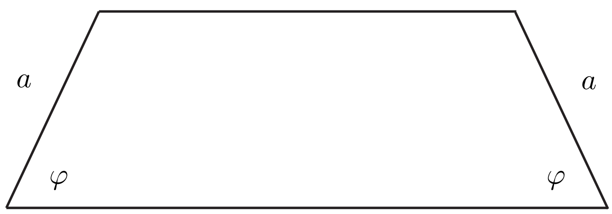
$$x = \frac{\sqrt[3]{2K}}{2}$$
$$y = \sqrt[3]{2K}$$
$$z = \sqrt[3]{2K},$$

ez a lehetséges helye a lokális szélsőérték helye. A második deriváltak:

$$f''_{xx} = \left.\frac{2K}{x^3}\right| = 8 > 0$$
$$f''_{yy} = \left.\frac{4K}{y^3}\right| = 2 > 0$$
$$f''_{xy} = 2$$

$D = 16 - 4 > 0$, tehát lokális minimum tartozik a fenti szélsőérték helyhez.

5) Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe (lásd ábra)? a=?, φ=?



A trapéz magassága $m = a \sin\varphi$. Ezzel a trapéz területe:

$$T = \frac{400 - 2a}{2} \cdot \sin\varphi = (200 - a)\, a \sin\varphi$$

A továbbiakban a $\varphi = y$ és $a = x$ jelölést használjuk. Ezzel a célfüggvény:

$$f\left(x, y\right) = \left(200 - x\right) x \sin y\,,\ \text{ahol } x > 0 \text{ és } \frac{\pi}{2} \geq y > 0.$$

A deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x &= 200 \sin y - 2x \sin y = \left(200 - 2x\right) \sin y = 0 \\ f'_y &= \left(200 - x\right) x \cos y = 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből $x = 100$ következik, hiszen $\sin y \neq 0$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $\cos y = 0$, azaz (figyelembe véve az értelmezési tartományt) $y = \dfrac{\pi}{2}$ adódik. A második deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2 \sin y = -2 < 0 \\ f''_{yy} &= \left(200 - x\right) x \left(-\sin y\right) = -100^2 < 0 \\ f''_{xy} &= \left(200 - 2x\right) \cos y = 0, \end{aligned}$$

ahonnan $D > 0$. Vagyis a célfüggvénynek lokális maximuma van, amely négyzet esetében valósul meg.

Feltételes szélsőérték feladatok

1) Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!

   a) $f\left(x, y\right) = x^2 + y^2$, feltétel: $x + y = 2C^2$
   Bevezetve a Lagrange-multiplikátort:

   $$f\left(x, y, \lambda\right) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x + y - 2C^2\right)$$

   A deriváltak:

   $$\begin{aligned} f_x &= 2x + \lambda = 0 \\ f_y &= 2y + \lambda = 0 \\ f_\lambda &= x + y - 2C^2 = 0 \end{aligned}$$

   Az első két egyenlet összege: $2\left(x + y\right) + 2\lambda = 0$. Ebbe helyettesítjük be a harmadik egyenletet, ahonnan $4C^2 + 2\lambda = 0$ következik. Innen tehát az egyenletrendszer megoldása: $\lambda = -2C^2$, $x = C^2$, $y = C^2$.

2) $f\left(x, y, z\right) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$, feltétel: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   A Lagrange-multiplikátorral felírt célfüggvény:

   $$f\left(x, y, z\lambda\right) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0$$

Az első deriváltak által alkotott egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= 4x + 2y + 2\lambda x = 0 \\
f'_y &= 4y + 2x + 2\lambda y = 0 \\
f'_z &= 4z + 2\lambda z = 0 \\
f'_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Az homogén lineáris egyenletrendszer megoldása az x, y, z, λ ismeretlenekre:

$$
\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2\lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda+4 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

A determináns:

$$
(2+\lambda)\left\{(2+\lambda)^2 - 1\right\} = 0,
$$

Az egyes gyököket külön vizsgáljuk meg:

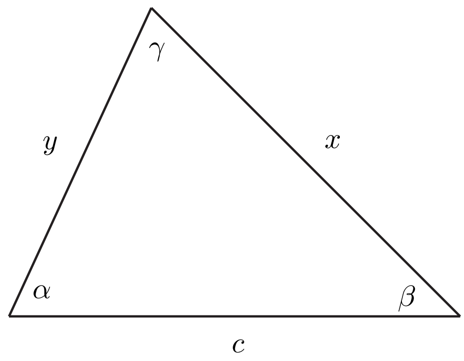
(a) $\lambda_1 = -1$: ebben az esetben $x = t$, $y = -t$, $z = 0$. A feltételi egyenletből: $2t^2 = 1$, ahonnan $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A lehetséges szélsőérték-helyek: $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, és $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Ekkor $f(P_1) = f(P_2) = 1$, minimum.

(b) $\lambda_2 = -2$: ekkor $x = y = 0$ és $z^2 = 1$ következik. Innen $P_3(0,0,1)$ és $P_4(0,0,-1)$. Itt $f(P_3) = f(P_4) = 2$, további vizsgálatot igényel.

(c) $\lambda_3 = -3$: ebben az esetben $x = t$, $y = t$, $z = 0$. A feltételi egyenletből: $2t^2 = 1$, ahonnan $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A lehetséges szélsőérték-helyek: $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, és $P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Ekkor $f(P_5) = f(P_6) = 3$, maximum.

ahonnan a gyökök: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

3) Adott egy háromszög egyik oldala (c) és a vele szemközti szög (γ). Határozzuk meg a háromszög többi alkotórészét úgy, hogy területe maximális legyen.



A célfüggvény legyen a kétszeres terület:

$$2T = xy \sin\gamma$$

A szinusz-tételt felírjuk az x és y oldalra, amit behelyettesítünk a célfüggvénybe:

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} c$$
$$y = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} c$$

Innen az $f(\alpha, \beta)$ függvény:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$$

A feltétel az, hogy a háromszög belső szögeinek összege $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Ezzel a Lagrange-multiplikátoros célfüggvény:

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma} + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 180°)$$

Az első deriváltak:

$$f'_\alpha = \frac{c^2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin\gamma} - \lambda = 0$$
$$f'_\beta = \frac{c^2 \sin\alpha \cos\beta}{\sin\gamma} - \lambda = 0$$
$$f'_\lambda = \alpha + \beta + \gamma - 180°$$

Az első két egyenlet átrendezésével:

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{\lambda \sin\gamma}{c^2}$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\lambda \sin\gamma}{c^2}$$

Ennek a két egyenletnek a hányadosa:

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$$

A szögkorlátok miatt innen $\alpha = \beta$ következik. Vagyis a keresett háromszög egyenlő szárú.