Matematika 2 építészmérnököknek

4. gyakorlat (2004. 03. 10. illetve 11.)

Differenciálegyenletek II.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletekről lesz szó. A megoldás menete (épp úgy, ahogy a gyakorlaton elhangzott) megtalálható az előadó, Dr Barabás Béla honlapján (3. előadás címen), ezért azt általánosságban nem részletezem, hanem lássuk a példákat!

1. FELADAT: $y'' - 3y' + 2y = xe^{-5x}$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, ebből $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$

Homogén általános: $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^x$

Inhomogén partikuláris: $n = 1, \quad \alpha = -5, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)e^{-5x}$$

$$y' = (-5ax + a - 5b)e^{-5x}$$

$$y'' = (25ax - 10a + 25b)e^{-5x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 3y' + 2y = (42ax - 13a + 42b)e^{-5x} = xe^{-5x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{42}, b = \frac{13}{1764}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = (\frac{1}{42}x + \frac{13}{1764})e^{-5x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x + (\frac{1}{42}x + \frac{13}{1764})e^{-5x}.$$

2. FELADAT: $y'' - 4y' + 3y = xe^{-5x}$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, ebből $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$

Homogén általános: $y_h = c_1e^{3x} + c_2e^x$

Inhomogén partikuláris: $n = 1, \quad \alpha = -5, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)e^{-5x}$$

$$y' = (-5ax + a - 5b)e^{-5x}$$

$$y'' = (25ax - 10a + 25b)e^{-5x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 4y' + 3y = (48ax - 14a + 48b)e^{-5x} = xe^{-5x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{48}, \quad b = \frac{7}{1152}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = (\frac{1}{48}x + \frac{7}{1152})e^{-5x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^x + (\frac{1}{48}x + \frac{7}{1152})e^{-5x}.$$

3. FELADAT: $y'' - 5y' + 4y = xe^x$
MEGOLDÁS:
Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1$
Homogén általános: $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$
Inhomogén partikuláris: $n = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)xe^x$$
$$y' = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x$$
$$y'' = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 5y' + 4y = (-6ax + 2a - 3b)e^x = xe^x,$$

amiből

$$a = -\frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{9}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = (-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9})xe^x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + (-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9})xe^x.$$

4. FELADAT: $y'' - 6y' + 5y = e^x \sin x$
MEGOLDÁS:
Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, ebből $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1$
Homogén általános: $y_h = c_1 e^{5x} + c_2 e^x$
Inhomogén partikuláris: $n = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^x \cos x + be^x \sin x$$
$$y' = (b - a)e^x \sin x + (a + b)e^x \cos x$$
$$y'' = -2ae^x \sin x + 2be^x \cos x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 6y' + 5y = (4a - b)e^x \sin x + (-4b - a)e^x cosx = e^x \sin x,$$

amiből

$$a = \frac{4}{17}, \quad b = -\frac{1}{17}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{4}{17}e^x \cos x - \frac{1}{17}e^x \sin x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x + \frac{4}{17}e^x \cos x - \frac{1}{17}e^x \sin x.$$

5. FELADAT: $y'' - 7y' + 6y = e^{-x} + x \cos 6x$
MEGOLDÁS:
Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, ebből $\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1$
Homogén általános: $y_h = c_1 e^{6x} + c_2 e^x$
Inhomogén partikuláris:
ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{-x}$$
$$y' = -ae^{-x}$$
$$y'' = ae^{-x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 7y' + 6y = 14ae^{-x} = e^{-x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{14}.$$

Az első taghoz tartozó inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih,1} = \frac{1}{14}e^{-x}.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 6$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)\sin 6x + (cx + d)\cos 6x$$

$$y' = (-6cx + a - 6d)\sin 6x + (6ax + 6b + c)\cos 6x$$

$$y'' = (-36ax - 36b - 12c)\sin 6x + (-36cx + 12a - 36d)\cos 6x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe egy nagyon bonyolult és csúnya törteket tartalmazó egyenletrendszert kapunk, amit a legelszántabbaknak ajánlok csak megoldásra (én feladtam). Az egyenletet azért leírom:

$$y''-7y'+6y = ((-30a+42c)x-7a-30b-12c+42d)\sin 6x+((-30c-42a)x+12a-42b-7c-30d)\cos 6x = x\cos 6x,$$

tehát látszik, hogy négy lineáris egyenletünk van 4 változóra: a $-30a+42c$ rész 1, a többi együttható nulla. Ezeket megoldva kapjuk a, b, c, d értékét, és így $y_{ih,2}$-t.

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{6x} + c_2e^x + \frac{1}{14}e^{-x} + y_{ih,2}.$$

6. FELADAT: $y'' - 8y' + 7y = (x + 7)\sinh x = (\frac{1}{2}x + \frac{7}{2})e^x + (-\frac{1}{2}x - \frac{7}{2})e^{-x}$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$, ebből $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 1$

Homogén általános: $y_h = c_1e^{7x} + c_2e^x$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = x(ax + b)e^x$$

$$y' = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x$$

$$y'' = (ax^2 + (4a + b)x + 2b)e^x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 7y = (-12ax - 6b)e^x = (\frac{1}{2}x + \frac{7}{2})e^x,$$

amiből

$$a = -\frac{1}{24}, \quad b = -\frac{7}{12}.$$

Az első tagból számolt inhomogén rész megoldása tehát

$$y_{ih,1} = (-\frac{1}{24}x^2 - \frac{7}{12}x)e^x.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)e^{-x}$$

$$y' = (-ax + a - b)e^{-x}$$

$$y'' = (ax - 2a + b)e^{-x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 7y = (16ax - 10a + 16b)e^{-x} = (-\frac{1}{2}x - \frac{7}{2})e^{-x},$$

amiből

$$a = -\frac{1}{32}, \quad b = -\frac{61}{256}.$$

A második tagból számolt inhomogén partikuláris rész megoldása így

$$y_{ih,2} = (-\frac{1}{32}x - \frac{61}{256})e^{-x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{7x} + c_2e^x + (-\frac{1}{24}x^2 - \frac{7}{12}x)e^x + (-\frac{1}{32}x - \frac{61}{256})e^{-x}.$$

7. FELADAT: $y'' - 4y' + 4y = e^x + \cos 2x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, ebből $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2$, egy darab kétszeres gyök van.

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 0$, tehát KÉTSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ax^2 e^{2x}$$

$$y' = (2ax^2 + 2ax)e^{2x}$$
$$y'' = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' + 4y' - 4y = 2ae^{2x} = e^{2x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{2}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának első része tehát

$$y_{ih,1} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = a \sin 2x + b \cos x$$

$$y' = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x$$
$$y'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 4y' + 4y = 8b \sin 2x - 8a \cos 2x = \cos 2x,$$

amiből

$$a = -\frac{1}{8}, \quad b = 0.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának második része tehát

$$y_{ih,2} = -\frac{1}{8} \sin 2x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} \sin 2x.$$

8. FELADAT: $y'' - 5y' + 6y = \sinh 3x$

MEGOLDÁS: felhasználva a sinh függvény definícióját, a jobb oldalt alakítsuk át az $\frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ alakra, így már elbánunk vele.

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, ebből $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 0$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = axe^{3x}$$

$$y' = (3ax + a)e^{3x}$$
$$y'' = (9ax + 6a)e^{3x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 5y' + 6y = ae^x = \frac{1}{2}e^x,$$

amiből

$$a = \frac{1}{2}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának első része tehát

$$y_{ih,1} = \frac{1}{2}xe^{3x}$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = -3, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{-3x}$$

$$y' = -3ae^{-3x}$$
$$y'' = 9ae^{-3x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 5y' + 6y = 30ae^{-3x} = -\frac{1}{2}e^{-x},$$

amiből

$$a = -\frac{1}{60}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának második része tehát

$$y_{ih,2} = -\frac{1}{60}e^{-3x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{1}{60}e^{-3x}.$$

9. FELADAT: $y'' - 6y' + 8y = x\sin 2x$
MEGOLDÁS:
Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2$
Homogén általános: $y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$
Inhomogén partikuláris: $n = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)\sin 2x + (cx + d)\cos 2x$$

$$y' = (-2cx + a - 2d)\sin 2x + (2ax + 2b + c)\cos 2x$$
$$y'' = (-4ax - 4b - 4c)\sin 2x + (-4cx + 4a - 4d)\cos 2x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 6y' + 8y = ((4a + 12c)x + 4b - 6a - 4c + 12d)\sin 2x + ((4c - 12a)x + 4a + 4d - 6c - 12b)\cos 2x = x\sin 2x,$$

amiből

$$a = \frac{1}{40}, \quad b = -\frac{3}{200}, \quad c = \frac{3}{40}, \quad d = \frac{17}{400}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = (\frac{1}{40}x - \frac{3}{200})\sin 2x + (\frac{3}{40}x + \frac{17}{400})\cos 2x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{2x} + (\frac{1}{40}x - \frac{3}{200})\sin 2x + (\frac{3}{40}x + \frac{17}{400})\cos 2x.$$

10. FELADAT: $y'' - 6y' + 9y = 3x^2$
MEGOLDÁS:
Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, ebből $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3$, tehát egy darab kétszeres gyök van.
Homogén általános: $y_h = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$
Inhomogén partikuláris: $n = 2, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$
$$y'' = 2a$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 6y' + 9y = 9ax^2 + (-12a + 9b)x + 2a - 6b + 9c = 3x^2,$$

amiből

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{9}, \quad c = \frac{2}{9}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$$

11. FELADAT: $y'' - 7y' + 12y = \sin 3x + \sinh 3x$

MEGOLDÁS: a sinh függvényt itt is a definíciója alapján átírjuk, így a baloldal három tagra bomlik: $\sin 3x + \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$.

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 3$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = a \sin 3x + b \cos 3x$$

$$y' = 3a \cos 3x - 3b \sin 3x$$

$$y'' = -9a \sin 3x - 9b \cos 3x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 7y' + 12y = (3a + 21b) \sin 3x + (3b - 21a) \cos 3x = \sin 3x,$$

amiből

$$a = \frac{1}{150}, \quad b = \frac{7}{150}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának első része tehát

$$y_{ih,1} = \frac{1}{150} \sin 3x + \frac{7}{150} \cos 3x.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 0$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = axe^{3x}$$

$$y' = (3ax + a)e^{3x}$$

$$y'' = (9ax + 6a)e^{3x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 7y' + 12y = 11ae^{3x} = \frac{1}{2}e^{3x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{22}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának második része tehát

$$y_{ih,2} = \frac{1}{22}xe^{3x}$$

HARMADIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = -3, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{-3x}$$

$$y' = -3ae^{-3x}$$

$$y'' = 9e^{-3x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 7y' + 12y = 42ae^{-3x} = -\frac{1}{2}e^{-3x},$$

amiből

$$a = -\frac{1}{84}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának harmadik része tehát

$$y_{ih,3} = -\frac{1}{84}e^{-3x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{150} \sin 3x + \frac{7}{150} \cos 3x + \frac{1}{22}xe^{3x} + -\frac{1}{84}e^{-3x}.$$

12. FELADAT: $y'' - 4y' = 2004 + e^x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, ebből $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 0$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{4x} + c_2$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ax$$

$$y' = a$$

$$y'' = 0$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 4y' = -4a = 2004,$$

amiből

$$a = -501.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának első része tehát

$$y_{ih,1} = -501x.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^x$$

$$y' = ae^x$$

$$y'' = ae^x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 4y' = -3ae^x = e^x,$$

amiből

$$a = -\frac{1}{3}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának második része tehát

$$y_{ih,2} = -\frac{1}{3}e^x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 - 501x - \frac{1}{3}e^x.$$

13. FELADAT: $y'' - 2y' + 5y = x^2$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, ebből $\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \cos 2x$

Inhomogén partikuláris: $n = 2, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 2y' + 5y = 5ax^2 + (5b - 4a)x + 2a - 2b + 5c = x^2,$$

amiből

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{4}{25}, \quad c = -\frac{2}{125}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{2}{125}$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \cos 2x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{2}{125}.$$

14. FELADAT: $y'' - 2y' + 10y = xe^x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, ebből $\lambda_1 = 1 + 3i, \quad \lambda_2 = 1 - 3i$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^x \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$

Inhomogén partikuláris: $n = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = (ax + b)e^x$$

$$y' = (ax + a + b)e^x$$

$$y'' = (ax + 2a + b)e^x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 2y' + 10y = (9ax + 9b)e^x = xe^x,$$

amiből

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = 0.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{1}{9}xe^x$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^x \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x + \frac{1}{9}xe^x.$$

15. FELADAT: $y'' - 8y' + 17y = e^{4x} \sin x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4 + i, \quad \lambda_2 = 4 - i$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{4x} \sin x + c_2 e^{4x} \cos x$

Inhomogén partikuláris: $n = 0, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 1$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = axe^{4x} \sin x + bxe^{4x} \cos x$$

$$y' = ((4a - b)x + a)e^{4x} \sin x + ((4b + a)x + b)e^{4x} \cos x$$

$$y'' = ((15a - 8b)x + 8a - 2b)e^{4x} \sin x + ((8a + 15b)x + 2a + 8b)e^{4x} \cos x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 17y = -2be^{4x} \sin x + 2ae^{4x} \cos x = e^{4x} \sin x,$$

amiből

$$a = 0, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = -\frac{1}{2}xe^{4x} \cos x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1 e^{4x} \sin x + c_2 e^{4x} \cos x - \frac{1}{2}xe^{4x} \cos x.$$

16. FELADAT: $y'' - 8y' + 20y = e^{2x} \sin 4x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4 + 2i, \quad \lambda_2 = 4 - 2i$

Homogén általános: $y_h = c_1 e^{4x} \cos 2x + c_2 e^{4x} \sin 2x$

Inhomogén partikuláris: $n = 0, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{2x} \cos 4x + be^{2x} \sin 4x$$

$$y' = (2a + 4b)e^{2x} \cos 4x + (-4a + 2b)e^{2x} \sin 4x$$

$$y'' = (-12a + 16b)e^{2x} \cos 4x + (-16a - 12b)e^{2x} \sin 4x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 20y = (-8a - 16b)e^{2x} \cos 4x + (16a - 8b)e^{2x} \sin 4x$$

amiből

$$a = \frac{1}{20}, \quad b = -\frac{1}{40}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{1}{20}e^{2x}\cos 4x - \frac{1}{40}e^{2x}\sin 4x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{4x}\cos 2x + c_2e^{4x}\sin 2x + \frac{1}{20}e^{2x}\cos 4x - \frac{1}{40}e^{2x}\sin 4x.$$

17. FELADAT: $y'' - 8y' + 25y = \cosh 4x = \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{4x}$, ahol a jobboldalt a cosh függvény definíciója alapján bontottuk nekünk megfelelő függvények összegére.

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$, ebből $\lambda_1 = 4 + 3i, \quad \lambda_2 = 4 - 3i$

Homogén általános: $y_h = c_1e^{4x}\cos 3x + c_2e^{4x}\sin 3x$

Inhomogén partikuláris:

ELSŐ RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{4x}$$

$$y' = 4ae^{4x}$$

$$y'' = 16ae^{4x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 25y = 9ae^{4x} = \frac{1}{2}e^{4x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{18}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának első része tehát

$$y_{ih,1} = \frac{1}{18}e^{4x}.$$

MÁSODIK RÉSZ: $n = 0, \quad \alpha = -4, \quad \beta = 0$, tehát NINCS REZONANCIA. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ae^{-4x}$$

$$y' = -4ae^{-4x}$$

$$y'' = 16e^{-4x}$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' - 8y' + 25y = 73ae^{-4x} = \frac{1}{2}e^{-4x},$$

amiből

$$a = \frac{1}{146}.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldásának második része tehát

$$y_{ih,2} = \frac{1}{146}e^{-4x}.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1e^{4x}\cos 3x + c_2e^{4x}\sin 3x + \frac{1}{18}e^{4x} + \frac{1}{146}e^{-4x}.$$

18. FELADAT: $y'' + 9y = \cos 3x$

MEGOLDÁS:

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 9 = 0$, ebből $\lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i$

Homogén általános: $y_h = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$

Inhomogén partikuláris: $n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 3$, tehát EGYSZERES REZONANCIA van. Ebből a próbafüggvény:

$$y = ax\sin 3x + bx\cos 3x$$

$$y' = (-3bx + a)\sin 3x + (3ax + b)\cos 3x$$
$$y'' = (-9ax - 6b)\sin 3x + (-9bx + 6a)\cos 3x$$

visszahelyettesítve ezeket az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$y'' + 9y = -6b\sin 3x + 6a\cos 3x = \cos 3x,$$

amiből

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = 0.$$

Az inhomogén partikuláris rész megoldása tehát

$$y_{ih} = \frac{1}{6}x\sin 3x.$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{6}x\sin 3x.$$