**Lineáris transzformáció sajátértéke és sajátvektora.**

**Mátrix sajátvektora és sajátértéke**

A következőkben legyen $R^n$ az n dimenziós valós oszlopvektorok tere.
Legyen adott $\underline{\underline{A}}$ egy kvadratikus (n x n) mátrix.

Legyen ***A*** homogén lineáris transzformáció, mely a tér minden **v** vektorához az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{v}$ vektort rendeli.

$$\underline{v} \xrightarrow[A]{} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v}$$

**Definíció:**

Az ***A*** lineáris transzformáció sajátvektora $\underline{s}$ ($\underline{s} \neq \underline{o}$), ha $\underline{s}$ képe az $\underline{s}$ vektor skalárszorosa, azaz a transzformáció csak a hosszát változtatja meg az irányát nem

azaz $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{s} = \lambda \cdot \underline{s}$

$\lambda$-t a transzformáció $\underline{s}$ -hez tartozó sajátértékének nevezzük.

Ha $\underline{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ akkor $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, innen $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Azaz $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{s} = \underline{0}$,

Mivel ($\underline{s} \neq \underline{o}$) , a fenti egyenletnek a triviális ($\underline{0}$) –tól különböző megoldásait keressük.
Ha az együttható-márix determinánsa nem nulla, akkor az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, és mivel a nullvektor megoldása az egyenletnek, nincs nem triviális megoldása.
Tehát
det($\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right)$= 0 szükséges ahhoz, hogy $\underline{s}$ ($\underline{s} \neq \underline{o}$) sajátvektora legyen a transzformációnak.
Ezt az egyenletet az $\underline{s}$ vektor karakterisztikus egyenletének nevezzük.
Ennek megoldásai adják a transzformáció sajátértékeit.

A sajátvektorokat az egyenletrendszer megoldásával kapjuk.
**Definíció:**
$\left(\underline{\underline{A}}\right)$ sorait és oszlopait felcserélve kapjuk a transzponáltját, és $\underline{\underline{A}}^T$ -al jelöljük.

**Definíció:**

$\underline{\underline{A}}$ mátrixot szimmetrikus mátrixnak nevezzük, ha a főátlóra szimmetrikus elemei azonosak ($a_{ij} = a_{ji}$ ha $i \neq j$), azaz $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

**Kidolgozott feladatok**

Legyen adva $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix valamint $\underline{\mathbf{v}}_1$ és $\underline{\mathbf{v}}_2$ vektorok.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 \\ -5 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Legyen az ($\mathbf{i}-\mathbf{k}$) vektor képe az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ által meghatározott lineáris transzformáció estén $\underline{\mathbf{v}}_1$. Adja meg $\underline{\mathbf{v}}_1$ koordinátáit!

b.) Legyen a $\underline{\mathbf{v}}_1$ vektor képe a $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ által meghatározott lineáris transzformáció estén $\underline{\mathbf{v}}_2$. Adja meg $\underline{\mathbf{v}}_2$ koordinátáit.!

c.) Döntse el, hogy $\underline{\mathbf{v}}_2$ koordinátáira melyik azonosság igaz !

$$\underline{\mathbf{v}}_2 = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ vagy mindkettő, vagy egyik sem

d.) Adja meg $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}$ transzponáltját

Megoldások

a.) $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ koordinátái: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

b.) $\underline{\mathbf{v}}_2$

$$\underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 \\ -5 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ -84 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c.)

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \begin{pmatrix} 151 & -11 & 35 \\ 10 & 118 & 32 \\ 19 & 73 & 23 \end{pmatrix}, \qquad (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -22 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \begin{pmatrix} 151 & 10 & 19 \\ -11 & 118 & 73 \\ 35 & 32 & 23 \end{pmatrix}, \qquad (\underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ -84 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy $\underline{\mathbf{v}}_2 = (\underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, Megjegyzés: Ez következik a mátrix szorzás asszociativitásából, ugyanis:

$$(\underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}})\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\mathbf{B}}}\,(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})=\underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{v_1}=\underline{\mathbf{v}}_2$$

A mátrix szorzás azonban nem kommutatív, $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}})\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\neq(\underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}})\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ mint a konkrét példában is látható.

d.)

$$\left(\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\right)^T=\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T\ .$$

**Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.**

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}=\begin{pmatrix}13&4&1\\4&10&4\\1&4&13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13-1\\0\\1-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\-12\end{pmatrix}\text{ és }\quad\underline{\underline{\mathbf{B}}}=\begin{pmatrix}13&-5&2\\-5&13&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ karakterisztikus polinomja $\begin{vmatrix}13-\lambda&4&1\\4&10-\lambda&4\\1&4&13-\lambda\end{vmatrix}=0$

az utolsó oszlopot kivonva az elsőből adódik, $\begin{vmatrix}12-\lambda&4&1\\0&10-\lambda&4\\-12+\lambda&4&13-\lambda\end{vmatrix}=0$

A középső sor szerint kifejtve $(10-\lambda)\begin{vmatrix}12-\lambda&1\\-12+\lambda&13-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}12-\lambda&4\\-12+\lambda&4\end{vmatrix}$

1.) $\begin{vmatrix}12-\lambda&1\\-12+\lambda&13-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12-\lambda&1\\0&14-\lambda\end{vmatrix}=(12-\lambda)(14-\lambda)$

2.) $\begin{vmatrix}12-\lambda&4\\-12+\lambda&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12-\lambda&4\\0&8\end{vmatrix}=8(12-\lambda)$

tehát $(10-\lambda)\begin{vmatrix}12-\lambda&1\\-12+\lambda&13-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}12-\lambda&4\\-12+\lambda&4\end{vmatrix}=$

$$=(10-\lambda)(12-\lambda)(14-\lambda)-32(12-\lambda)=(12-\lambda)\left((10-\lambda)(14-\lambda)-32\right)$$

azaz

$$(12-\lambda)\left((10-\lambda)(14-\lambda)-32\right)=(12-\lambda)\left(140-14\lambda-10\lambda+\lambda^2-32\right)=0$$

vagyis

$$(12-\lambda)\left(140-24\lambda+\lambda^2-32\right)=0$$

$$(12-\lambda)\left(108-24\lambda+\lambda^2\right)=0 \qquad \lambda_1=12$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{24\pm\sqrt{576-432}}{2}=\frac{24\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{24\pm12}{2}$$

$$\lambda_3=18$$

$$\lambda_2=6$$

Határozzuk meg a $\lambda_1=12$ -hez tartozó sajátvektort.

$$\underline{\underline{A}}\underline{s_1}=\begin{pmatrix}13&4&1\\4&10&4\\1&4&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\\s_{13}\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\\s_{13}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}13-12&4&1\\4&10-12&4\\1&4&13-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\\s_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&1\\4&-2&4\\1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\\s_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$s_{11}+4s_{12}+s_{13}=0$$

$$4s_{11}-2s_{12}+4s_{13}=0$$

$$s_{12}=0$$

$$s_{11}=-s_{13}$$

$$\underline{s_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=12$$

tehát a $\lambda_1=12$ sajátértékhez tartozó sajátvektor például az $\underline{s_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix}13&4&1\\4&10&4\\1&4&13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13-1\\0\\1-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\-12\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=18$-hoz tartozó sajátvektor meghatározása

$$\begin{pmatrix}13-18&4&1\\4&10-18&4\\1&4&13-18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{21}\\s_{22}\\s_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-5s_{21} + 4s_{22} + s_{23} = 0$$
$$s_{21} - 2s_{22} + s_{23} = 0$$
$$5s_{21} - 4s_{22} - s_{23} = 0$$
$$6s_{21} - 6s_{22} = 0$$
$$s_{21} = s_{22}$$
$$s_{22} - 2s_{22} + s_{23} = 0$$
$$-s_{22} + s_{23} = 0$$
$$s_{23} = s_{22}$$
$$\underline{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13+4+1 \\ 4+10+4 \\ 1+4+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ -hoz tartozó sajátvektor meghatározása $\begin{pmatrix} 13-6 & 4 & 1 \\ 4 & 10-6 & 4 \\ 1 & 4 & 13-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-8+1 \\ 4-20+4 \\ 1-8+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tehát:

$$\lambda_1 = 12 \qquad \lambda_2 = 18 \qquad \lambda_3 = 6$$

$$\underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{s_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s_1}^* = \frac{\underline{s_1}}{|\underline{s_1}|}$$

$$\underline{s_1}^* = \frac{\underline{s_1}}{|\underline{s_1}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{s_2}^* = \frac{\underline{s_2}}{|\underline{s_2}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{s_3}^* = \frac{\underline{s_3}}{|\underline{s_3}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

**Definíció**

$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$ ortonormált mátrix ha ha $i \neq j$, akkor $\underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = 0$

ha $i = j$, akkor $\underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = 1$

**Tétel**

Ortonormált mátrix inverze a transzponáltja

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{31} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{31} \\ e_{21} & e_{22} & e_{31} \\ e_{31} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás $\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{31} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{31} \\ e_{21} & e_{22} & e_{31} \\ e_{31} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Spektrál-felbontás

Legyen $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix

És legyenek $\lambda_i$-k az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei ($i=1,2,3$)

**Tétel**

$\lambda_i$ valós minden i-re, és a hozzájuk tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.

Legyenek $\underline{s_i}^* = \dfrac{\underline{s_i}}{\left|\underline{s_i}\right|}$ ($i=1,2,3$) a sajátvektorok irányába mutató egységvektorok

**Tétel**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{s_1}^* & \underline{s_2}^* & \underline{s_3}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s_1}^* & \underline{s_2}^* & \underline{s_3}^* \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{2}} & \frac{18}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{18}{\sqrt{3}} & \frac{-12}{\sqrt{6}} \\ -\frac{12}{\sqrt{2}} & \frac{18}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} =$$