Matematika 2 építészmérnököknek

2. gyakorlat (2004. 02. 18. illetve 19.)

Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Az $(n \times n)$-es mátrixok potosan megfelelnek az n-dimenziós euklideszi tér lineáris transzformációinak. Egy transzformáció hatása egy vektorra annak felel meg, hogy a transzformáció mátrixával megszorozzuk az adott (oszlop)vektort.

Egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számot az A mátrix sajátértékének nevezünk, ha létezik olyan $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, amire igaz, hogy

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x},$$

más szóval ha az A-nak megfelelő lineáris transzformáció az $\underline{x}$ vektor irányában λ arányú nyújtást jelent. Ha egy $\underline{x}$ vektor sajátvektor a λ sajátértékkel, akkor bármilyen nemnulla valós számmal megszorozva is egy ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektort kapunk. Ennek megfelelően bármikor megtehetjük, hogy egy már megtalált sajátvektor helyett az ő számszorosával (de nem a nullaszorosával) dolgozunk tovább, ez egyrészt néha kényelmesebb, másrészt sokszor szükségünk lehet egységhosszú sajátvektorokra: ilyenkor a vektor minden koordinátáját el fogjuk osztani a vektor hosszával.

Egy A mátrix sajátértékei pontosan a

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei, ahol I az egységmátrix. Ez az egyenlet n-edfokú, ha A $(n \times n)$-es.

Minden valós szimmetrikus mátrixra igaz, hogy sajátértékei valósak, sajátvektorai pedig ortogonális rendszert alkotnak (bármely kettő merőleges egymásra), valamint igaz rá a főtengely tétel, ezt konkrétan a feladatok között látjuk majd.

A továbbiakban csak valós szimmetrikus mátrixokkal foglalkozunk.

1. Diagonális mátrixok

   Diagonális egy mátrix, ha a főátlóján kívül csupa 0 áll. Ezek a legegyszerűbb mátrixok, sajátértékeik épp az átlóban álló elemek, sajátvektoraik pedig a megfelelő egységvektorok. Például $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sajátértékei és a hozzá tartozó sajátvektorok:

   $$\lambda_1 = 2, \quad \underline{v}_1 = (1, 0, 0)$$

   $$\lambda_2 = -1, \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 0)$$

   $$\lambda_3 = 3, \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1).$$

2. Blokkdiagonális mátrixok

   Ha egy mátrix blokkdiagonális (azaz minden eleme nulla, kivéve a főátlója mentén elhelyezkedő négyzetes blokkokat), akkor sajátértékei megegyeznek a megfelelő blokkokból képzett kisebb mátrixok sajátértékeivel, sajátvektorait pedig megkaphatjuk úgy, ha a kis blokkmátrixok sajátvektorait a megfelelő számú nullával kiegészítjük. Például: $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ennek két blokkja van. Az egyik a 3-as szám önmagában, ez a $\lambda_1 = 3$ sajátértéknek felel meg, az ehhez tartozó sajátvektor $\underline{v}_1 = (0, 0, 1)$. A másik blokk a $B = \begin{pmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{pmatrix}$, ennek sajátértékeit a karakterisztikus egyenletből határozhatjuk meg. Ez jelen esetben:

   $$\left(\frac{41}{25} - \lambda\right)\left(\frac{34}{25} - \lambda\right) - \frac{144}{625} = 0,$$

   ez egy másodfokú egyenlet, gyökei $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 1$. Keressük meg az ezekhez tartozó sajátvektorokat! Mivel sajátvektor számszorosa is sajátvektor, kereshetjük a vektort $\underline{x} = (1, y)$ alakban. (Ezt mindig megtehetjük, feltéve, hogy az egyessel jelölt elem nem nulla.) $\lambda_2 = 2$ esetén a

   $$B\underline{x} = 2\underline{x}$$

   egyenletet kiírva az első sor arra vezet, hogy

   $$\frac{41}{25} - \frac{12}{25}y = 2,$$

   amiből $y = -\frac{3}{4}$,
   $\lambda_3 = 1$ esetén pedig

   $$\frac{41}{25} - \frac{12}{25}y = 1,$$

   amiből $y = \frac{4}{3}$. Azt kaptuk tehát végül, hogy az A mátrix sajátértékei és sajátvektorai:

   $$\lambda_1 = 3, \quad \underline{v}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \underline{v}_2 = (1, -\frac{3}{4}, 0)$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \underline{v}_3 = (1, \frac{4}{3}, 0).$$

Ellenőrizhetjük a megoldásunkat beszorzással (tegyük meg), valamint azt is megnézhetjük, hogy a kapott sajátvektorok valóban ortogonálisak (azaz bármely kettő skalárszorzata 0).

A következő mátrix sajátértékeit, sajátvektorait pontosan ugyanígy kapjuk meg. Csak a számszerű megoldást mellékelem. Ha a gyakorlás során foglalkoztok a feladatokkal, ne feledjétek, hogy az én megoldásaimban szereplő sajátvektorok számszorosai is ugyanolyan jó megoldások!

FELADAT:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MEGOLDÁS:

$$\lambda_1 = 2, \quad \underline{v}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \underline{v}_2 = (1, 1, 0)$$

$$\lambda_3 = 2, \quad \underline{v}_3 = (1, -1, 0).$$

3. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{13}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

. Ez nem blokkdiagonális, valamilyen szimmetriát mégis észrevehetünk benne (azon kívül, hogy valós szimmetrikus). Hogy ezt jobban észrevegyük, és hogy ne kelljen folyton törtekkel számolnunk, emeljünk ki 1/9-et a mátrixból:

$$A = \frac{1}{9} 9A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 \\ -5 & 13 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha a $B = 9A$ mátrixnak megtaláljuk a sajátértékeit, akkor az A-hoz tartozókat is tudjuk egyből, hiszen a következő két egyenlet ekvivalens:

$$(9A)\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \frac{\lambda}{9} \underline{x}$$

tehát ha a B sajátértékeit elosztjuk 6-tal, akkor az A sajátértékeit kapjuk (a sajátvektorok pedig ugyanazok lesznek).

Érdemes tehát a B mátrixxal foglalkozni, aminek egész elemei vannak, és így könnyebben számolhatunk vele. Az imént említett szimmetriát is könnyebben meglátjuk benne. Ha ránézünk a mátrixra, látjuk, hogy a keresett sajátvektor első két koordiátáját megegyezőnek, a harmadikat pedig különbözőnek választhatjuk, azaz a megoldást kerressük $\underline{x} = (1, 1, z)$ alakban. $\lambda \underline{x} = (\lambda, \lambda, \lambda z)$, tehát a $9A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ egyenlet első és harmadik sora a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$13 - 5 + 2z = \lambda$$

$$2 + 2 + z = \lambda z,$$

amit megoldva kapjuk, hogy a B mátrix két sajátértéke 9 és 0, sajátvektorai $(1, 1, \frac{1}{2})$ és $(1, 1, -4)$. Az eredeti A-ra tehát

$$\lambda_1 = 1, \quad \underline{v}_1 = (1, 1, \frac{1}{2})$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \underline{v}_2 = (1, 1, -4).$$

A harmadik sajátvektorát könnyen megkaphatjuk abból, hogy tudjuk, a három sajátvektor páronként merőleges egymásra, tehát $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = (-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ illetve ennek $(-\frac{2}{9})$-szerese, $(1, -1, 0)$ is ugyanúgy sajátvektor. Az ehhez tartozó sajátértéket legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy megszorozzuk A-t $(1, -1, 0)$-val, kapjuk $(2, -2, 0)$-t, amiből látjuk, hogy $\lambda_3 = 2$. Végülis a harmadik sajátérték-sajátvektor párra azt kaptuk, hogy

$$\lambda_3 = 2, \quad \underline{v}_3 = (1, -1, 0).$$

Ugyanezt a szimmetriát fedezzük fel a következő példában, és ennek segítségével határozzuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat:

FELADAT:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

MEGOLDÁS:

$$\lambda_1 = 1, \quad \underline{v}_1 = (1, 1, \frac{1}{2})$$
$$\lambda_2 = 2, \quad \underline{v}_2 = (1, 1, -4)$$
$$\lambda_3 = 2, \quad \underline{v}_3 = (1, -1, 0).$$

(a megoldás nagyon hasonlít a kidolgozott példában szereplő számokhoz, ez ne zavarjon meg senkit.)

4. A következő példában is valamilyen szimmetriát szeretnénk kihasználni:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Ebből az egész számokból álló B mátrixból leolvasható, hogy sajátvektorai lesznek valamilyen $\underline{x} = (1, y, 1)$ alakú vektorok. Lássuk:

$$13 + 4y + 1 = \lambda$$
$$4 + 10y + 4 = \lambda y,$$

ezekből a következő párokat kapjuk: 18 és (1,1,1), illetve 6 és (1,-2,1). Ezekből leolvashatjuk az A-nak két sajátérték-sajátvektor párját:

$$\lambda_1 = 3, \quad \underline{v}_1 = (1, 1, 1)$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \underline{v}_2 = (1, -2, 1).$$

A harmadik sajátvektort az első kettő vektoriális szorzataként kapjuk, ha pedig az így kapott vektort beszorozzuk az A mátrixszal, látjuk, hogy az a saját kétszeresébe ment át, azaz

$$\lambda_3 = 2, \quad \underline{v}_3 = (1, 0, -1).$$

A következő két feladat pontosan ugyanígy oldható meg:

FELADAT:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

MEGOLDÁS:

$$\lambda_1 = 3, \quad \underline{v}_1 = (1, 1, 1)$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \underline{v}_2 = (1, -2, 1)$$
$$\lambda_3 = 3, \quad \underline{v}_3 = (1, 0, -1).$$

FELADAT:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

MEGOLDÁS:

$$\lambda_1 = 3, \quad \underline{v}_1 = (1, 1, 1)$$
$$\lambda_2 = 0, \quad \underline{v}_2 = (1, -2, 1)$$
$$\lambda_3 = 3, \quad \underline{v}_3 = (1, 0, -1).$$

5. A következő mátrixot nézzük:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

ez majdnem olyan, mint egy blokkdiagonális mátrix. Ha az $A - \lambda I$ mátrixban felcseréljük a két alsó sort, majd a két jobboldali oszlopot, akkor a következőt kapjuk:

$$B = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Tudjuk ugyanakkor, hogy ezen műveletek végrehajtása során a determináns nem változott meg (pontosabban kétszer egymás után ellenkezőjére változott az előjele). Tehát a B mátrixnak ugyanakkor lesz nulla a determinánsa, mint amikor $A - \lambda I$-nek. Másszóval az A mátrixnak ugyanazok a sajátértékei, mint a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak. Ezt pedig könnyű meghatározni, hiszen blokkdiagonális. A sajátértékek $\lambda_1 = 3$,

$\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 1$. Visszatérve az eredeti mátrixra most megkeressük a sajátvektorokat: $\lambda_1 = 3$-hoz ránézésre a $(0,1,0)$ tartozik. $\lambda_2 = 11$-hez nézzük az egyenletrendszert ($\underline{x} = (1, y, z)$ alakban keressük a megoldást):

$$2 + 3z = 11$$

$$3y = 11y$$

amiből $z = 3$, $y = 0$ adódik. Ugyanígy a $\lambda_3 = 1$-hez:

$$2 + 3z = 1$$

$$3y = y,$$

ebből $z = -\frac{1}{3}$, $y = 0$. Kaptuk tehát végül, hogy

$$\lambda_1 = 3, \quad \underline{v}_1 = (0,1,0)$$

$$\lambda_2 = 11, \quad \underline{v}_2 = (1,0,3)$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \underline{v}_3 = (1,0,-\frac{1}{3}).$$