Matematika ÉP2

Felületek, 10. gyakorlat

2014/15. őszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Fogalmak

A felületeket két skalárparamétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Szokásos módon rögzítjuk tehát az origóból kiinduló $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló térveli vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k},$$

vagy

$$\underline{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\,.$$

A következőkben - a görbékhez hasonlóan- feltesszük, hogy az $x(u,v)$, $y(u,v)$ és $z(u,v)$ kétváltozós függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például elég sokszor differenciálhatóak.
Ha a v paramétert rögzítjük ($v = v_0$) és csak az u paramétert változtatjuk, akkor az

$$\underline{r}(u,v_0) = [x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)]$$

függvény egy felületi görbét ír le. Különböző rögzített v értékek esetén egy felületi görbesereget kapunk. Hasonlóan az u paraméter rögzített értékeihez egy másik görbesereg tartozik. Úgy is elképzelhetjük a felület ilyen típusú megadását, mintha a felületen futó görbék hálózatával jellemeznénk a felületet.

Felületi normális, érintősík

Az $\underline{r}(u,v_0) = [x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)]$ görbe tetszőleges u paraméterű pontjában az érintővektor az u szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_u(u,v_0) = [x_u(u,v_0), y_u(u,v_0), z_u(u,v_0)]\,.$$

Ez a vektor érintő a felülethez is. Hasonlóan az $\underline{r}(u_0,v) = [x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v)]$ görbe tetszőleges v paraméterű pontjában az érintővektor a v szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_v(u_0,v) = [x_v(u_0,v), y_v(u_0,v), z_v(u_0,v)]\,.$$

Ez a vektor szintén érintő a felülethez is.
A *felületi normális* mindkét érintővektorra merőleges, tehát előállítható a következő alakban:

$$\underline{n} = \underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v).$$

Amennyiben bevezetjük a *Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket*

$$E = (\underline{r}_u)^2 \qquad F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v \qquad G = (\underline{r}_v)^2\,,$$

akkor a felületi normális hossza a következő képlettel számolható:

$$|\underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Az $\underline{n}$ felületi normális segítségével felírhatjuk a felület tetszőleges u_0, v_0 paraméterű pontjában az *érintősík egyenletét*:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0,$$

ahol $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ és $\underline{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Felületi görbék ívhossza

Az $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméterezéssel és a $t_1 < t < t_2$ feltétellel kijelölhetünk a felületen egy $\underline{r}\,(u(t), v(t))$ görbedarabot. Ezen görbe megadott darabjának *ívhossza* az

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v})^2}\mathrm{d}t$$

formulával számolható, ahol pont jelzi a t változó szerinti deriválást és alsó index az u vagy v változó szerinit parciális deriválást.
A Gauss-féle elsőrendű főmennyiségek használatával az ívhosszt a következő formulával is számolhatjuk:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\mathrm{d}t$$

Felületdarab felszíne

Ha az u, v paramétersíkon kijelülönk egy T tartományt, akkor ez meghatározza az $\underline{r}(u,v)$ felület egy darabját. Ezen felületdarab felszíne az alábbi kettősintegrállal számolható ki:

$$\mathcal{F} = \int\int_T |\underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\int_T \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Felületi pontok osztályozása

Képzeljük el, hogy a felület valamely pontjában az érintősíkot egy picit elmozdítjuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy belemetszen a felületbe. a kapott metszetgörbének vegyük a másodrendű közelítését. A másodrendű görbe lehet ellipszis, hiperbola vagy parabola. Ennek megfelelően a felületi pont lehet elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus. A felületi pont jellegének kiszámítása a következőképpen történik. Először is bevezetjük a *Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket:*

$$L = \underline{r}_{uu} \cdot \underline{n}^0 \qquad M = \underline{r}_{uv} \cdot \underline{n}^0 \qquad N = \underline{r}_{vv} \cdot \underline{n}^0,$$

ahol $\underline{n}^0$ jelöli az egységnyi hosszú felületi normálist. Ekkor

1. ha $LN - M^2 > 0$, akkor a felületi pont elliptikus,
2. ha $LN - M^2 < 0$, akkor a felületi pont hiperbolikus,
3. ha $LN - M^2 = 0$, akkor a felületi pont parabolikus.

Megjegyzés: Ha a felület $z = f(x,y)$, $(x,y) \in T$ alakban adott, akkor az $LN - M^2$ kifejezés előjele megegyezik az

$$f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$$

kifejezés előjelével.

2. Feladatok

1. Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és alkotójának iránya az $\underline{a}$ vektor! (*Segítség:* A henger általános egyenlete: $\underline{r}(u,v) = \underline{\rho}(u) + v\underline{a}$.)

   (a) $\underline{\rho}(u) = 2\cos u\underline{j} + 3\sin u\underline{k}, \quad \underline{a} = \underline{i}$

   (b) $\underline{\rho}(u) = 3\text{ch } u\underline{i} + \text{sh } u\underline{k}, \quad \underline{a} = \underline{j}$

   (c) $\underline{\rho}(u) = (2\sin u + 3\text{tg } u)\underline{i} + 2\cos u\underline{j}, \quad \underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4\underline{k}$

2. Írja fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és csúcspontja az $\underline{a}$ helyvektor végpontja! (*Segítség:* A kúp általános egyenlete: $\underline{r}(u,v) = \underline{\rho}(u) + v\left(\underline{a} - \underline{\rho}(u)\right) = (1-v)\underline{\rho}(u) + v\underline{a}$.)

   (a) $\underline{\rho}(u) = \text{sh } u\underline{i} + \text{ch } u\underline{j}, \quad \underline{a} = 5\underline{k}$

   (b) $\underline{\rho}(u) = u\underline{i} + u^4\underline{j}, \quad \underline{a} = 3\underline{j} + 7\underline{k}$

3. Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!

   (a) $\underline{\rho}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}, \quad y$-tengely

   (b) $\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 1)\underline{k}, \quad z$-tengely

   (c) $\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 5)\underline{k}, \quad y$-tengely

4. Írja fel az alábbi felületek adott pontbeli érintősíkjának egyenletét! (*Megjegyzés:* ha a felület $z = f(x,y)$ alakban adott, akkor a felület vektoregyenletes felírása: $\underline{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$.)

   (a) $\underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k}, \quad u = 1,\ v = -2$

   (b) $\underline{r}(u,v) = u\cos v\underline{i} + u\sin v\underline{j} + v\underline{k}, \quad$ tetszőleges pontban

   (c) $\underline{r}(u,v) = 3\sin u\cos v\underline{i} + 3\sin u\sin v\underline{j} + 3\cos u\underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{2},\ v = \frac{\pi}{3}$

   (d) $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k}, \quad u = 1,\ v = 2$

   (e) $\underline{r}(u,v) = (3 + 2\cos u)\cos v\underline{i} + (3 + 2\cos u)\sin v\underline{j} + 2\sin u\underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{4},\ v = -\frac{\pi}{2}$

   (f) $x^2y + z^3 = 12, \quad P(1,2,2)$

5. Számolja ki az alábbi felületek felszínét a megadott tartományon!

   (a) R sugarú kör: $\underline{r}(u,v) = R\cos u \cos v\underline{i} + R\cos u \sin v\underline{j} + R\sin u\underline{k}, \quad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]$

   (b) Tórusz (pl. a $(3,0,0)$ körül vegyünk az xz-síkban egy 2 sugarú kört és ezt forgassuk meg a z-tengely körül): $\underline{r}(u,v) = (3+2\cos u)\cos v\underline{i} + (3+2\cos u)\sin v\underline{j} + 2\sin u\underline{k}, \quad u \in [0,2\pi],\ v \in [0,2\pi]$

   (c) $90°$ nyílásszögű kúp egy része: $\underline{r}(u,v) = u\cos v\underline{i} + u\sin v\underline{j} + u\underline{k}, \quad 0 \le u \le 5,\ 0 \le v \le 2\pi$

   (d) Hengerpalást felszíne: $\underline{r}(u,v) = 3u\cos v\underline{i} + 3u\sin v\underline{j} + v\underline{k}, \quad 0 \le u \le 5,\ 0 \le v \le 2\pi$

   (e) $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (u^2+v^2)\underline{k},$ ha (u,v) az origó körüli 2 sugarú kört futja végig

   (f) $\underline{r}(u,v) = \text{ch}\, u\cos v\underline{i} + u\underline{j} + \text{ch}\, u\sin v\underline{k}, \quad 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\pi$

   (g) Csavarfelület: $\underline{r}(u,v) = u\cos v\underline{i} + u\sin v\underline{j} + v\underline{k}, \quad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi$

   (h) $\underline{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u)\underline{i} + (\sin u + v\cos u)\underline{j} + (u+v)\underline{k}, \quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 1$

   (i) $\underline{r}(u,v) = u^2\cos v\underline{i} + u^2\underline{j} + u^2\sin v\underline{k}, \quad 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le \pi$

   (j) $\underline{r}(u,v) = \ln u\underline{i} + \ln u\sin v\underline{j} + \ln u\cos v\underline{k}, \quad 1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le \pi$

6. Ellenőrizze le, hogy az $\underline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ felület minden pontja parabolikus!

7. Mutassa meg, hogy az $\underline{r}(u,v) = (\sin v, v, u)$ felület minden pontja hiperbolikus!

8. Bizonyítsa be, hogy a tórusz külső részén fekvő pontok elliptikusak, a belső részén fekvő pontok hiperbolikusak, a legfelső és legalsó kör minden pontja parabolikus! (tórusz: $\underline{r}(u,v) = (a+b\cos u)\cos v\underline{i} + (a+b\cos u)\sin v\underline{j} + b\sin u\underline{k}$)

9. Mutassa meg, hogy a $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ alakban megadott felület minden pontja hiperbolikus!

10. Határozza meg a $3z + 3xz - yz + x + y = 0$ alakban megadott felület esetén az origóban a felület típusát!

11. Határozza meg az $\underline{r}(u,v) = (u^2+v^2, u+v, u^2v^2)$ felület $(u_0,v_0) = (1,-1)$ pontjában a felület típusát!

12. Lássa be, hogy a $z = x^4 - y^4$ alakban megadott felület minden ponja hiperbolikus!

13. Határozza meg, hogy az R sugarú gömb $(R,0,0)$ pontjában milyen típusú a felület!