

# Matematika ÉP2

## Komplex számok, 1. gyakorlat

### 2014/15. őszi félév

## 1. Elméleti összefoglaló

### Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

A  $z$  komplex szám algebrai alakja  $z = x + yi$ , ahol  $x, y \in \mathbb{R}$  és  $i^2 = -1$ .  $x$  a komplex szám valós része ( $Re(z) = x$ ), míg  $y$  a képzetes rész ( $Im(z) = y$ ). A komplex szám abszolút értéke  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , míg a konjugáltja  $\bar{z} = x - yi$ . A komplex számoknak geometriai reprezentációja is van, mégpedig az  $xy$ -sík  $P(x, y)$  pontja, vagy az  $xy$ -síkban az origóból a  $P(x, y)$  pontba mutató  $\vec{OP}$  vektor. Amennyiben  $\varphi$ -vel jelöljük az  $x$  tengely és az  $\vec{OP}$  vektor által bezárt szöveget, illetve  $r$ -rel az  $\vec{OP}$  vektor hosszát, akkor felírhatjuk a komplex számok trigonometrikus alakját:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Itt az  $r$  és  $\varphi$  paraméterek a következő módon számolhatóak:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

### Műveletek algebrai és trigonometrikus alakban

Tekintsük a  $z_1$  és  $z_2$  komplex számokat, melyek algebrai és trigonometrikus alakja a következő:  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$ , illetve  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ .

1. **Összeadás, kivonás:** Csak ALGEBRAI alakban végezhető el. (A valós és képzetes részekre külön-külön elvégezzük az összeadást/kivonást.)

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

2. **Szorzás:** ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

3. **Osztás:** ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető. (Algebrai alakban a nevező konjugáltjával bővítünk.)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

4. **Hatványozás:** Csak TRIGONOMETRIKUS alakban végezhető el.

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

5. *n*-edik gyökvonás: Csak TRIGONOMETRIKUS alakban végezhető el.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

*Megjegyzés:* Az algebra alaptétele alapján a komplex számok körében minden *n*-edfokú  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  alakú egyenletnek pontosan *n* darab gyöke van, amennyiben az *m*-szeres gyököket multiplicitással (azaz *m*-szer) számoljuk.

## 2. Feladatok

1. Számolja ki a következő komplex számok esetében a  $z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$ ;  $z_1(z_2 - z_1)$ ;  $\frac{z_2^2}{z_1}$ ;  $z_1^3 \cdot z_2$ ; illetve  $\frac{z_1^2}{z_2}$  értékeket!

(a)  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $z_2 = -3i + 4$     (b)  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = 1 + i$

(c)  $z_1 = 1 - 3i$ ,  $z_2 = -i$     (d)  $z_1 = -i + 2$ ,  $z_2 = -4 + 7i$

2. Hozza algebrai alakra a következő kifejezéseket!

(a)  $(1 + 6i) - i(-4 + 5i)$     (b)  $(1 + i)\overline{(2 - 3i)}$     (c)  $\overline{(2 + i)}(4 - 7i)$

(d)  $\frac{2 + 4i}{3 - 2i}$     (e)  $\frac{1}{(1 - i)^2}$     (f)  $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)}$

(g)  $4 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$     (h)  $3 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$     (i)  $2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

3. Számolja ki a következő komplex számok esetében a  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$ ;  $\frac{z_2^2}{z_1}$ ;  $z_1^3 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1^2}{z_2}$ ;  $z_2^{10}$  illetve  $z_1^{-10}$  értékeket! (az eredményeket elég trigonometrikus alakban megadni, de fontos a főargumentum, azaz  $\varphi \in [0; 2\pi)$ )

(a)  $z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  és  $z_2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

(b)  $z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  és  $z_2 = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

(c)  $z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$  és  $z_2 = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

4. Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját!

(a)  $z = 1 + i\sqrt{3}$     (b)  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$     (c)  $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

(d)  $z = -1 + i$     (e)  $z = -2$     (f)  $z = -1 - i$

(g)  $z = -4i$     (h)  $z = -\sqrt{3} + i$     (i)  $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(j)  $z = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$     (k)  $z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2014}$

5. Végezze el a következő hatványozásokat!

(a)  $(1 + i\sqrt{3})^{-10}$     (b)  $(1 - i)^4$     (c)  $(-1 + i)^7$

(d)  $(1 + i)^{12}$     (e)  $(-2\sqrt{3} + 2i)^{-9}$     (f)  $(2 + 2i)^6$

6. Végezze el a következő gyökvonásokat!

(a)  $\sqrt[4]{-16}$     (b)  $\sqrt{2i}$     (c)  $\sqrt[5]{-243i}$

(d)  $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$     (e)  $\sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}$     (f)  $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$

7. Oldja meg a következő egyenleteket!

(a)  $z^3 - 1 = 0$     (b)  $z^2 - z - 10 = 0$     (c)  $z^5 - i = 0$

(d)  $z^3 = 1 + i$     (e)  $z^3 + 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2} = 0$     (f)  $5z^2 = 128i$

(g)  $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$     (h)  $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$     (i)  $(6 - z)^6 + 1 = 0$

8. Végezze el a következő műveleteket!

(a)  $(-\sqrt{3} + i)^{\frac{3}{2}}$     (b)  $(-1 - i)^{\frac{8}{3}}$